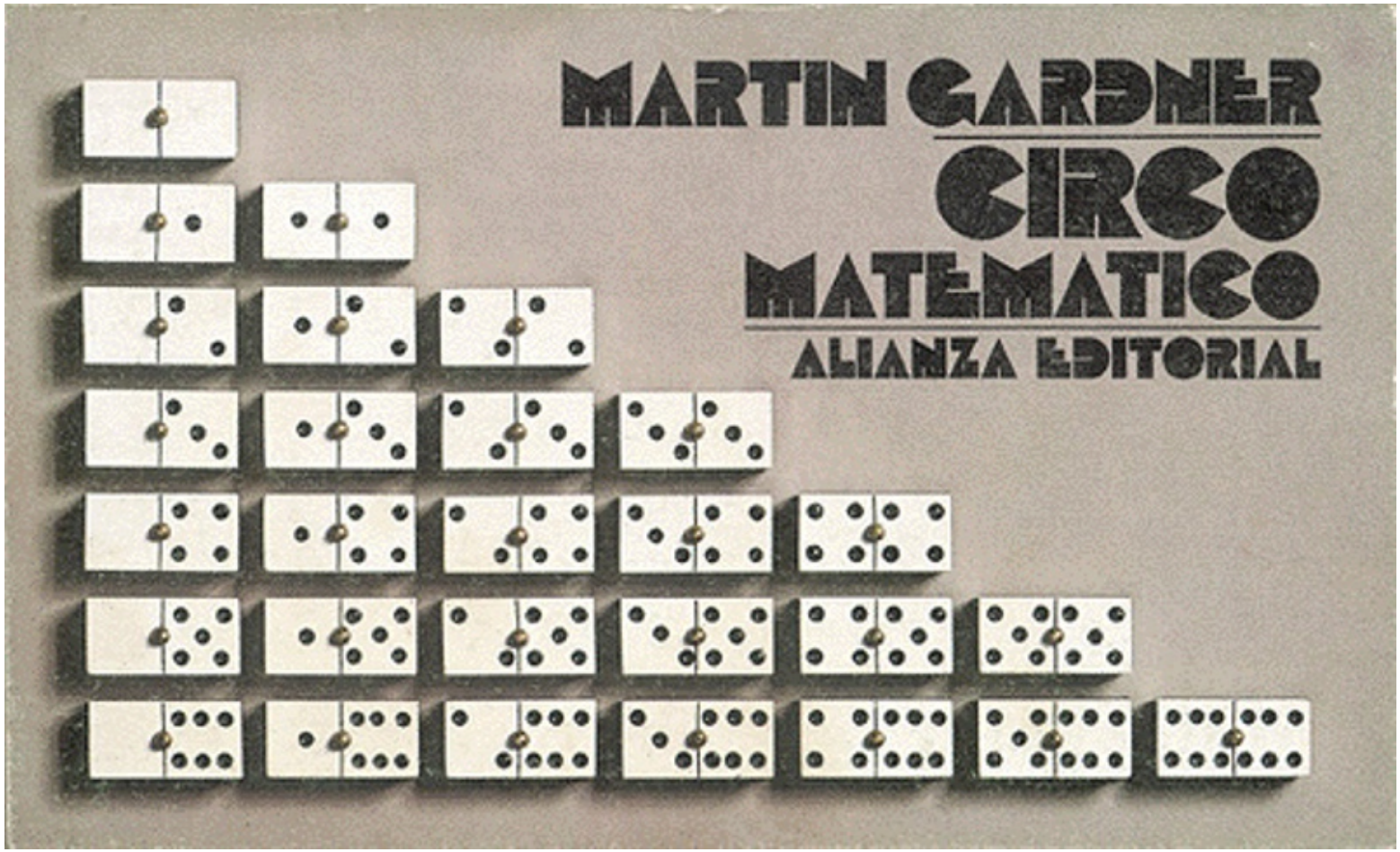

MARTIN GARDNER
CIRCO
MATEMATICO
ALIANZA EDITORIAL

Introducción

Para Donald E. Knoth, extraordinario matemático, científico de computadores, escritor, músico, humorista, entusiasta de las matemáticas recreativas y mucho más.

A veces estas reflexiones asombran
todavía la noche conturbada o el reposo a
mediodía.
T. S. Eliot

Los capítulos que componen este libro fueron antes publicados en la sección mensual, fija, Juegos Matemáticos de la revista *Scientific American*. Los matemáticos me preguntan a veces, qué significa para mí semejante titulo. No es fácil de explicar. Ya Ludwig Wingenstein utilizó la palabra «juego» para ejemplificar la noción de «palabras-familia», imposibles de definir unívocamente. La idea de «juego» conlleva muchos significados, enlazados entre sí un poco a la manera en que lo están los miembros de una familia humana, significados que han ido concatenándose al tiempo que evolucionaba el lenguaje. Podemos decir que los «juegos matemáticos» o las «matemáticas recreativas» son matemáticas, no importa de qué tipo, cargadas de un fuerte componente lúdico: pero poco aclaramos así, porque las ideas de «juego», «recreación» y «lúdico» son aproximadamente sinónimas. En último extremo nos encontramos con peticiones de principio, como al decir que la poesía es la obra de los poetas, o que la música de jazz es lo que los músicos de jazz componen o interpretan. Las matemáticas recreativas serían así la clase de matemáticas que hace disfrutar a los recreativistas.

Aunque no puedo definir los juegos matemáticos más rigurosamente que la poesía, sí mantengo que, sean lo que fueren, las matemáticas recreativas proporcionan el mejor camino para captar el interés de los jóvenes durante la enseñanza de la matemática elemental. Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden excitar mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones «prácticas», sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de las experiencias vividas por ellos. Y si el «juego» se elige y prepara con cuidado, puede llevarle casi insensiblemente hasta ideas matemáticas de importancia.

No sólo los niños, sino también los adultos pueden quedar arrobados por uno de estos rompecabezas sin utilidad previsible, y la historia de las matemáticas está llena de trabajos sobre tales rompecabezas, tanto de profesionales como de aficionados, que han conducido hasta inesperados desarrollos. En su libro *Mathematics: Queen and Servant of Science*, Eric Temple Bell cuenta que los primeros trabajos sobre clasificación y enumeración de nudos apenas fueron considerados otra cosa que curiosidades y rompecabezas. La teoría de nudos ha venido, con el tiempo, a convertirse en rama floreciente de la Topología:

Así pues, los problemas de nudos resultaron ser mucho más que meros rompecabezas. Y es frecuente que esto suceda en matemáticas, en parte porque los matemáticos replantean, no sin cierta perversidad, difíciles problemas que confiaron (mas no supieron) resolver, dándoles la forma de acertijos y charadas de apariencia trivial, pero en el fondo, con idéntica estructura que el problema original. Esta jugarreta ha hecho picar e interesarse a personas ajenas a las matemáticas, quienes, atemorizados ante la dificultad del problema, se habían inhibido o echado atrás. Y así, muchos aficionados han hecho a la matemática ricas aportaciones sin sospecharlo. Tenemos un ejemplo en el problema de los quince escolares (1850) de T. P. Kirkman, que frecuentemente presentan los libros de matemáticas recreativas.

Tampoco faltan rompecabezas matemáticos que, por ser en realidad triviales, no conducen a desarrollos interesantes. Empero, ambos tipos tienen algo en común, que nadie ha expresado mejor que el distinguido matemático Stanislaw Ulam en su autobiografía, *Adventures of a Mathematician*:

Las matemáticas, con sus grandiosas panorámicas su apreciación de la belleza y su percepción de nuevas realidades, posee una propiedad adictiva que es menos evidente y saludable, afín en cierto modo a los efectos de algunas drogas. El más nimio problema, aún siendo inmediatamente reconocible como trivial o reiterativo, puede ejercer esta influencia adictiva. Una de las formas en que podemos vernos arrastrados es comenzar a resolverlos. Recuerdo que *Mathematical Monthly* publicaba de cuando en cuando unos problemas enviados por un matemático francés, relativos a ciertas configuraciones banales de circunferencias, rectas y triángulos del plano. «*Belanglos*» (sin importancia), como dicen los alemanes; empero, con estas figuritas corríase el riesgo de quedar atrapado tan pronto se comenzaba a resolverlas, a pesar de saber perfectamente que no podrían conducirnos a campos nuevos, más generales ni más estimulantes. Mucho contrasta esto con cuanto he dicho acerca de la historia del teorema de Fermat, que ha suscitado la creación de nuevas y vastas concepciones algebraicas. La diferencia tal vez resida en que para resolver un pequeño problema puede bastar un esfuerzo moderado, mientras que el teorema de Fermat sigue sin estar resuelto, desafiando al mundo matemático. No obstante, ambos tipos de curiosidades matemáticas tienen una fuerte componente adictiva para el matemático en potencia, cualidad que existe a todos los niveles de la matemática, desde las bagatelas a los aspectos más inspirados.

Martin Gardner

Marzo de 1979

Capítulo 1
Ilusiones ópticas

Las ilusiones ópticas, figuras, objetos o sucesos que no son lo que aparentan al ser percibidos, han tenido y tienen todavía importante papel en las bellas artes, en matemáticas, en psicología e incluso en filosofía. Los antiguos griegos deformaron las columnas del Partenón con el fin de que parecieran perfectamente rectas al ser vistas desde el suelo por la gente. En sus grandes obras murales, los pintores renacentistas solían distorsionar las figuras con objeto de que, miradas desde abajo, parecieran ser de proporciones normales. El interés de los matemáticos por las ilusiones ópticas se debe a que muchas de ellas guardan relación con la perspectiva (una rama de la geometría proyectiva) y con otras cuestiones geométricas. Los psicólogos estudian las ilusiones para saber cómo interpreta el cerebro los datos que le llegan a través de los sentidos. Y los filósofos de diversas escuelas de realismo directo, que mantienen que nosotros percibimos objetos reales externos a nuestras mentes, tienen el problema de explicar cómo pueden entonces presentarse errores de percepción.

Consideradas en su aspecto menos serio, las ilusiones visuales son, sencillamente, divertidas. Disfrutamos sabiéndonos engañados por ellas, por motivos que no se diferencian mucho del placer de ser confundidos por un ilusionista. Las ilusiones nos recuerdan que el ancho mundo exterior no siempre es lo que parece. Nos fijaremos en este capítulo en unas cuantas ilusiones ópticas no demasiado conocidas, que exhalan todas ellas fuerte aroma matemático.

Los procesos de que el cerebro se vale para interpretar los datos visuales son tan complejos y poco conocidos, que no es milagro que en sus explicaciones los psicólogos mantengan opiniones divergentes, cuando no contradictorias, incluso para las ilusiones más sencillas. Entre las más clásicas están el aumento aparente del sol, la luna y las constelaciones cuando están cerca del horizonte. El difunto Edwin G. Boring, de la Universidad Harvard escribió numerosos artículos explicando que la «flusión de la luna» se debe fundamentalmente a la acción de alzar la mirada. Una opinión diferente, que se remonta hasta Ptolomeo, es defendida por Lloyd Kaufman e Irvin Rock en su artículo «The Moon Illusion», en Scientific

American de julio de 1962. Su teoría, basada en el efecto de «distancia aparente», es a su vez refutada por Frank Restle en un trabajo publicado en Science del 20 de febrero de 1970.

La opinión actual es que casi todas las ilusiones ópticas se originan en el cerebro, cuando éste va explorando su memoria en busca de lo que Richard L. Gregory denomina «la apuesta óptima», es decir, la interpretación que mejor explique los datos visuales a partir de las experiencias acumuladas por el cerebro. Tal punto de vista está sustentado por el reciente descubrimiento de que muchos animales, entre ellos aves y peces, sufren ilusiones que podrían ser explicadas de esta forma y también, por trabajos de antropología en culturas marcadamente diferentes de la nuestra. Los zulúes, por ejemplo, viven inmersos en un mundo de formas redondeadas. Las cabañas son redondas, y también lo son sus puertas.

Al arar, sus surcos trazan líneas curvas. Raramente tienen ocasión de ver líneas o ángulos rectos, y su idioma no contiene ningún vocablo que signifique «cuadrado». Así nos lo dice John Updike en la segunda estrofa de su poema «Zulus Live in Land Without a Square»:

Cuando los zulúes sonreír no pueden,
ceñudos fingen enojos,
para siempre tener curvas
frente a los ojos.
Y las distancias entre lugares y cosas
se calculan «a vuelo de mariposa»...

Diversos estudios recientes han mostrado que ciertas ilusiones relativas a rectas paralelas y esquinas en ángulo, figuras que con tanta frecuencia observamos en el mundo rectangular de las sociedades tecnológicamente adelantadas, difícilmente son percibidas por los zulúes. Los filósofos John Locke y George Berkeley se preguntaron ambos si un ciego de nacimiento que súbitamente recuperase la vista sabría distinguir, sin tocarlos, cuál de dos objetos era un cubo y cuál una esfera. Locke y Berkeley respondieron que no. Una obra de Gregory, Eye and Brain, resume estudios recientes en esta misma dirección, y aunque no se llega a conclusiones

tajantes, sí parece dar la razón a aquellos filósofos, aportando de nuevo pruebas que justifican el enfoque moderno, a saber, que casi todas las ilusiones ópticas se deben a que el cerebro interpreta erróneamente los datos que recibe.

El descubrimiento de figuras «indecidibles» ha suscitado nuevos y entretenidos desarrollos en la teoría de las ilusiones visuales. Las figuras indecidibles representan objetos que no pueden existir. La mente, incapaz de encontrarles pies ni cabeza, queda sumida en un estado de curiosa perplejidad. (Son figuras que recuerdan proposiciones indecidibles, como «Esta proposición es falsa», o «No te lo pierdas si puedes»). Entre las figuras indecidibles, la más conocida es el notable «blivet» (que un americano pronunciaría casi igual que «believe it», «créalo») de tres columnas (¿o sólo dos?) que vemos en la Figura 1.

Figura 1. El monumento "indecible" proyectado por Roger Hayward

Las primeras versiones empezaron a circular entre ingenieros y proyectistas hacia 1964, y la portada del número de marzo de 1965 de la revista Mad mostraba a un Alfred E. Neuman sonriente y haciendo equilibrios con el blivet sobre su dedo índice.

Roger Hayward ha publicado un artículo sobre «Blivets: Research and Development» [Investigación y desarrollo de los blivets] en The Worm Runners Digest (diciembre de 1968), donde presentaba algunas variantes (véase la Figura 1).

Otra conocida figura indecidible es una escalinata cuadrada por la que se puede ascender o descender indefinidamente sin por ello subir ni bajar. Puede verse en una litografía de Maurits C. Escher titulada «Ascendiendo y descendiendo», que data de 1960, así como en otra litografía del mismo artista, de 1961, que representa un salto de agua haciendo funcionar una máquina de movimiento perpetuo. Esta desconcertante ilusión, creada por el genetista inglés L. S. Penrose y por su hijo, el fisicomatemático Roger Penrose, fue inicialmente publicada en un artículo de ambos, «Imposible Objects: A Special Type of Visual Illusion» [Un tipo especial de ilusiones visuales: los objetos imposibles], en The British Journal of Psychology (febrero de 1958, pp. 31-33).

Estos mismos dos autores se sirvieron otra vez de ella en su colección de originales «rompecabezas navideños» publicada en The New Scientist (25 de diciembre de 1958, pp. 1580-81). Admitiendo (véase la Figura 2) que hagan falta tres peldaños para ir desde A, en el suelo, hasta lo alto del escalón B, ¿cómo se puede ir desde A hasta C sin subir más de 10 escalones? La solución sólo es posible porque la propia estructura dibujada no lo es.

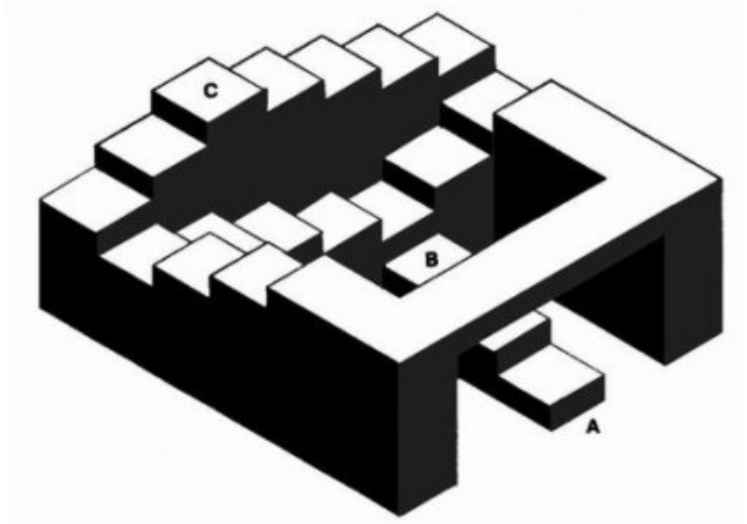


Figura 2. Un enigma basado en la escalinata de Penrose

Un tercer objeto imposible también muy conocido es la armazón del cubo sostenido por la figura sedente de otra famosa litografía de Escher, que puede verse en la página 110 de mi Carnaval matemático. La sección de «Cartas» de Scientific American reproducía una fotografía de esta «Canasta de acceso libre» (así fue llamada) en el número de junio de 1966; en realidad aquella fotografía se obtuvo retocando el negativo. No obstante, sí es posible construir un modelo real que visto desde un ángulo adecuado nos dé una auténtica fotografía de la «canasta». Su construcción ha sido explicada por William G. Hyzer en Photo Methods for Industry, enero de 1970.

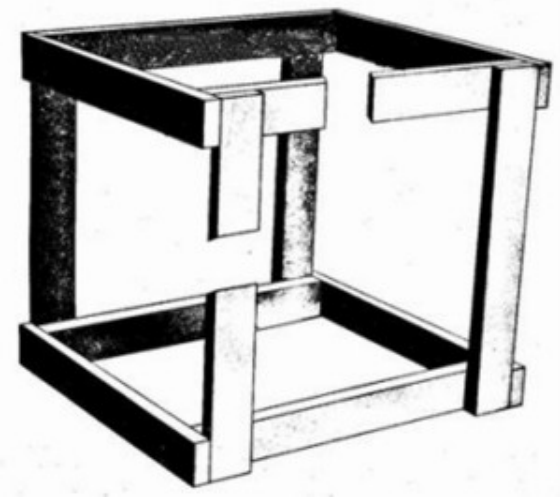


Figura 3. Un posible modelo de una canasta imposible

Vemos en la Figura 3 el modelo de Hyzer. Si lo giramos y ladeamos hasta que, observándolo con un solo ojo, los huecos coincidan con toda exactitud con dos travesaños traseros del armazón, el cerebro se convence de que las aristas traseras están delante, produciendo la imagen mental de un cubo imposible.

Muchas otras curiosas ilusiones son debidas a que poseemos dos ojos. Extienda los brazos ante sí, manteniendo los dedos índices de ambas manos estirados horizontalmente, con las puntas en contacto. Mirando más allá de los dedos, enfoque la mirada sobre una pared distante, y separe los dedos ligeramente. Verá entonces una «salchicha flotante» entre los dedos. Como es obvio, la salchicha está

formada por las imágenes superpuestas de las yemas de los dedos, vistas cada una por distinto ojo.

Otra antigua ilusión, también debida a la visión binocular, se produce acercando un tubo (es suficiente una hoja arrollada de papel) a un ojo, como si fuera un telescopio. Supongamos que llevamos el tubo al ojo derecho; la mano izquierda, con la palma vuelta hacia uno mismo, se coloca verticalmente pegada al borde izquierdo del tubo. Deslizando hacia adelante y hacia atrás la mano izquierda a lo largo del tubo, con los dos ojos abiertos y mirando algún objeto distante, se encontrará un punto donde parecerá que estamos mirando a través de un agujero recortado en el centro de la mano izquierda.

En ciertas circunstancias, también la visión monocular puede crear una ilusión de profundidad. Mirando una fotografía con un solo ojo a través de un tubo se produce un ligero efecto de tridimensionalidad. Una de las más llamativas ilusiones de la visión monocular puede verse en la Figura 4.

Figura 4. Los clavos se ponen en pie

Es necesario inclinar el libro hacia atrás, hasta que el plano de la página quede casi enrasado con la vista. Mirando la figura con un solo ojo desde un punto próximo al borde inferior de la página, aproximadamente donde convergerían los clavos si fuesen prolongados hacia abajo, durante un breve instante los clavos parecerán ponerse en pie. William James, en el Capítulo 19 del Volumen 2 de sus famosos Principles of Psychology, tras dar una excelente explicación de esta ilusión, añade esta sucinta coletilla, que resume las ideas actuales sobre la percepción: «Dicho con otras palabras, nosotros vemos, como siempre, el objeto más verosímil».

El llamado «péndulo de Pulfrich» es otra asombrosa ilusión binocular, que recibe su nombre de su descubridor, Carl Pulfrich, quien la dio a conocer en 1922, en una revista alemana. El péndulo está formado, sencillamente, por un trozo de hilo, que puede tener desde unos 30 cm hasta más de un metro. De él pende un objeto pequeño. Pídale a otra persona que sostenga la punta libre del cordel, y que mantenga el péndulo en oscilación en un plano perpendicular al de su línea de visión.

Sitúese usted en el otro extremo de la habitación, frente al péndulo, que se habrá de observar con ambos ojos. Con uno se mira directamente; con el otro, a través de uno de los cristales de unas gafas de sol. Es preciso fijar la mirada en el punto medio de la oscilación; la vista no debe ir siguiendo a la plomada en su vaivén. ¡Parecerá entonces que el peso describe una órbita elíptica! Trasladando al otro ojo el cristal oscuro, el peso seguirá describiendo la misma órbita elíptica, pero ahora recorrida en sentido contrario. Tan fuerte es la ilusión de profundidad, que colocando por detrás del plano de oscilación un objeto grande parece como si el plomo pasase en realidad a través del objeto, como un fantasma.

Gregory explica la ilusión de Pulfrich diciendo que el ojo adaptado a la oscuridad envía sus señales al cerebro más lentamente que el ojo descubierto. Este desfase entre las señales induce al cerebro a interpretar el movimiento del plomo como si alternativamente fuese pasando por delante y por detrás de su plano de oscilación.

Pueden experimentarse sensaciones de profundidad parecidas al mirar imágenes de televisión, cubriendo un ojo con un cristal oscuro o mirando con uno de los ojos a través de un pequeño orificio perforado en cartulina. Cuando en la pantalla aparece una imagen que se desplaza horizontalmente con cierta velocidad, el observador tendrá la impresión de que lo hace por delante o por detrás de la pantalla. Esta ilusión animó a varias compañías a anunciar, en 1966, unas gafas especiales que, de creer a la publicidad, permitirían al espectador ver en tres dimensiones las imágenes planas de su televisor. El precio era elevado, pero evidentemente las gafas no eran sino una montura barata provista de dos lentes de plástico, una transparente y otra oscura.

Otra conocida categoría de figuras ilusorias, muy analizadas por la escuela psicológica de la Gestalt, está formada por imágenes que pueden ser interpretadas

de dos maneras con probabilidades iguales o casi iguales. La mente fluctúa entre ambas interpretaciones, incapaz de decidir cuál es la apuesta óptima. Probablemente el ejemplo más conocido sea el apilamiento de cubos que se invierte repentinamente, haciendo cambiar el número de cubos que parecen formarlo. En estos últimos años todos hemos tenido dificultades de interpretación al contemplar fotografías de cráteres lunares y no poderlos ver como montañas, sobre todo si invertimos la fotografía, con lo que los cráteres se ven iluminados desde abajo por la luz solar, ángulo de iluminación que raramente habremos tenido ocasión de experimentar.

Hay una figura de un jarrón oscuro cuya silueta puede ser imaginada como los perfiles de dos caras. Una ilusión parecida saltó inesperadamente a la palestra en la nueva bandera canadiense, adoptada oficialmente en 1965 tras varios meses de disputas parlamentarias.

Fije usted la atención en el fondo blanco, por encima de la hoja de arce (véase la Figura 5).

Figura 5. Los hombres enojados de la bandera canadiense

Se verán entonces los perfiles de dos hombres malhumorados (¿quizás un liberal y un conservador?) con las frentes en contacto, zahiriéndose (¿uno en francés y otro en inglés?).

En cuanto haya usted localizado estas dos caras, ya no tendrá dificultad en descifrar el significado de los polígonos de formas irregulares que en bloques negros podemos ver en la Figura 6.

Figura 6. Un efecto "Gestalt". ¿Qué representan los contornos negros?

Otra figura muy estudiada es el cubo de Necker, así llamado en honor del suizo L. A. Necker, quien escribió acerca de él allá por 1830.

El cubo tiene la propiedad de invertirse al observarlo. Los Penrose, en los acertijos navideños ya mencionados, tuvieron la feliz idea de añadir un escarabajo al «cubo», en este caso una caja rectangular. (Véase la Figura 7.) El insecto parece encontrarse en la pared exterior.

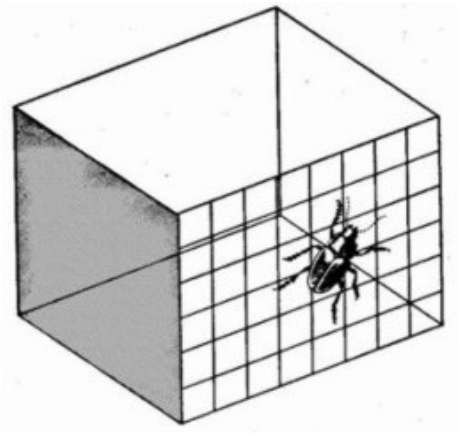


Figura 7. Hay que encerrar el insecto en la jaula

Pero si fijamos la mirada en el ángulo inferior izquierdo de la caja, y con la imaginación nos esforzamos en pensar que esa es la esquina más cercana, de repente, ¡flip, flop!, el insecto queda encerrado en su jaula, transportado por la acción del pensamiento.

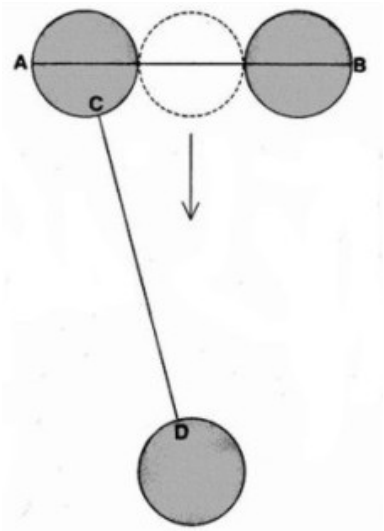


Figura 8. Una ilusión de equidistancia

Con tres monedas podemos poner de manifiesto otra sorprendente ilusión, seguramente relacionada con la ilusión de Müller-Lyer (dos segmentos de longitudes iguales que parecen ser de tamaños distintos a causa de las puntas de flecha trazadas en sus extremos: en una de las figuras apuntan hacia afuera y en la otra hacia adentro). Se colocan las monedas en fila (véase la Figura 8) y se le pide a otra persona que haga deslizar hacia abajo la moneda central hasta que la distancia AB sea igual a la distancia CD. Casi nadie separa la moneda lo suficiente; en realidad, cuesta creer que la solución correcta sea la dada en la ilustración. El truco puede repetirse con monedas mayores, mesitas circulares, vasos de agua y objetos parecidos.

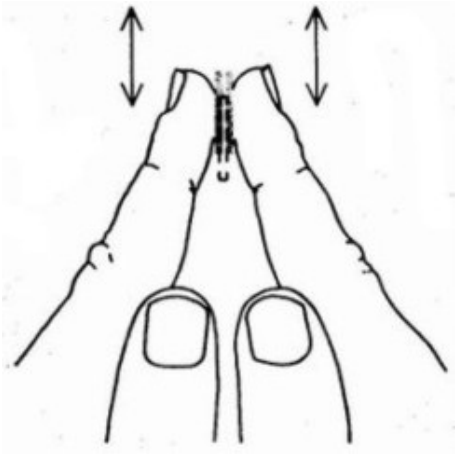


Figura 9. La moneda fantasma

La ilusión de la «moneda fantasma», que vemos en la Figura 9, es más conocida por los ilusionistas que por los psicólogos. Sostenga una contra otra dos monedas entre las yemas de los dedos índices y frótelas rápidamente una contra otra. Aparecerá entonces una tercera moneda, la moneda fantasma. ¿Pero por qué solamente por un extremo y no por el otro?

Soluciones

Para subir hasta lo alto de la escalera de Penrose en sólo 10 pasos, se suben cuatro peldaños, se gira a la derecha, se suben otros tres escalones más, se recorre la ronda de forma de U, se bajan tres peldaños, y se suben otros tres, llegando así a lo alto.

Aunque nunca he visto impresa ninguna explicación del efecto de la moneda fantasma, he recibido de muchos lectores una tan convincente que no dudo tiene que ser correcta. Al frotar las monedas, adelante y atrás, como se ha explicado, el ángulo que forman los dedos hace que las monedas tiendan a divergir en la posición adelantada, creando allí dos imágenes claramente distintas. Por el contrario, en la parte trasera, donde los dedos forman una V, el ligero movimiento lateral provoca que en la posición retrasada las monedas tiendan a converger, y que sus imágenes se superpongan. La consecuencia es que las imágenes delanteras, individuales, son débiles, mientras que las traseras se refuerzan la una a la otra, creando una imagen única, más intensa.

Los propios lectores describieron diversas formas sencillas de comprobar esta teoría. Por ejemplo, Marjorie Lundquist y S. H. Norris propusieron el siguiente experimento. Vuelva las palmas hacia afuera, con los pulgares señalando hacia usted, sosteniendo dos monedas entre las puntas de los dedos y frotándolas, la imagen fantasma se forma en la V de los pulgares, en el sentido de alejarse del experimentador. Y así es como deberíamos esperar que sucediese, pues a causa de los ligeros movimientos laterales, la superposición tiende a producirse en el lado más alejado. Si los dedos se colocan no formando una V, sino directamente opuestos uno a otro, en línea recta, los desplazamientos laterales son iguales en ambos lados, y se ven dos monedas fantasmas. La misma imagen fantasma,

simétrica y doble, se producirá cuando las monedas se sujeten con los índices, pero en lugar de frotarlas adelante y atrás lo hagamos de arriba a abajo, verticalmente.

Otra llamativa confirmación de la teoría, que descubrí por mí mismo, se obtiene frotando rápidamente las yemas de los dedos, adelante y atrás, sin moneda ninguna entre ellos. La divergencia por la parte delantera y la superposición por la trasera son evidentes. ¡Se verá un dedo fantasma dentro de la V, con el filo de una uña justo en su centro!

La ilusión de la moneda fantasma puede convertirse fácilmente en un truco de prestidigitación. Se comienza ocultando una moneda no muy grande en los pliegues de la palma de la mano derecha. Se le pide a un espectador que nos preste dos monedas, que sujetaremos entre las yemas de los dedos pulgar e índice de la mano derecha. Se frotan las monedas rápidamente, para crear la imagen fantasma, al tiempo que con la mano se mantiene oculta la moneda escondida en la palma. Cuando ya se aprecie la imagen fantasma, se hace gesto de atraparla, cerrando rápidamente el puño, para después abrir la mano y demostrar que el fantasma se ha materializado, convirtiéndose en una moneda constante y sonante.

Capítulo 2
Cerillas

Las cerillas, sean de papel o de madera, tienen dos propiedades que las hacen idóneas para divertimentos matemáticos. Pueden servir de «cuentas» y también de segmentos de longitud unidad. La recopilación de todos los pasatiempos con cerillas ocuparía un grueso volumen. En este capítulo nos fijaremos en unas cuantas muestras representativas de los trucos, juegos y acertijos que se pueden realizar con cerillas.

Todos los ilusionistas conocen el viejo truco «del piano» (así llamado por la posición de las manos del espectador) que puede anunciarse como un intercambio mágico de par a impar. Se le pide a un espectador que coloque las manos sobre la mesa, palmas abajo. Entre cada par de dedos contiguos insertamos dos cerillas, excepto entre los dedos anular y meñique de una mano, donde sólo colocaremos una (véase la Figura 10).

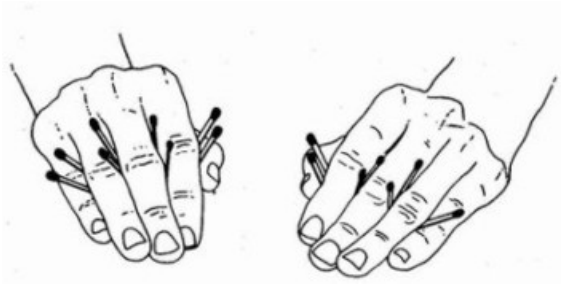


Figura 10. El truco del piano

Ahora iremos retirando uno por uno los pares de cerillas, separando las cerillas de cada par, que iremos colocando sobre la mesa, una frente a cada una de las manos del espectador. En cada extracción el mago repite «Dos cerillas», y de este modo, formando un montoncito de cerillas frente a cada mano, hasta que sólo quede la cerilla desemparejada. Se retira esta cerilla de la mano del paciente espectador, y sosteniéndola en alto, se dice: «Tenemos ahora dos montones de cerillas, formados ambos por pares. ¿En qué montón quiere que ponga esta cerilla suelta?» La cerilla se coloca donde nos indiquen.

Señale usted el montoncito donde quedó la cerilla extra, y diga: «En este montón hay una cerilla de más». Y señalando el otro: «Y aquí hay un montón formado por pares de cerillas». Se dan entonces unos cuantos pases mágicos sobre los montones y se anuncia que con ellos la cerilla desemparejada se verá obligada a pasar al otro montón. Para demostrar que verdaderamente así ha ocurrido, «contamos» las cerillas del grupo donde pusimos la última, apartándolas de dos en dos, y dejándolas en un lado. Escribimos «contar», entrecomillado, porque en realidad no se las cuenta. En vez de eso, vaya diciendo tan sólo «dos cerillas» cada vez que las aparte del montón. El montón estará formado justamente por pares, y por ello, al final no quedarán cerillas desemparejadas. Se «cuenta» el otro montón de igual manera. Al retirar el último par quedará todavía una cerilla suelta. Un poco de palique en tono convincente bastará para dejar perplejo a casi todo el mundo. El truco funciona por sí solo, sin especial habilidad del mago, y el lector que lo ensaye un poco comprenderá inmediatamente por qué.

En la primera recopilación conocida de cuestiones y problemas de matemática recreativa, Problémes plaisans et délectables, de Claude Gaspar Bachet, publicado en Francia en 1612, podemos ver un truco que se remonta a tiempos medievales. La versión clásica es como sigue.

Se disponen sobre la mesa 24 cerillas y tres objetos pequeños, una moneda, un anillo y una llave, por ejemplo. Se pide colaboración a tres espectadores. Designémoslos 1º 2º y 3º. Para estar seguro de recordar el orden en que han sido llamados (les dice usted) le da una cerilla a su primer ayudante, dos al segundo, y tres al tercero. Estas cerillas se toman de las 24 que hay en la mesa, con lo cual queda un montoncito de 18 fósforos. Se dice a los ayudantes que se guarden en un bolsillo las cerillas que han recibido.

Vuélvase de espaldas para no ver lo que sucede, y pídale al espectador número 1 que coja uno de los tres objetos y se lo guarde en el bolsillo. El segundo espectador toma uno de los dos objetos restantes, y el tercer espectador, el único que todavía queda. Pídale ahora a la persona que tomó la moneda que retire de la mesa tantas cerillas como inicialmente recibió, y que las guarde en el puño. (Usted no tiene forma de saber quién es, pues está vuelto de espaldas.) Dígale a la persona que haya cogido el anillo que recoja de la mesa doble número de cerillas de las que

recibió, y que las guarde en el puño. Pídale al que cogió la llave que tome el cuádruplo de su número de cerillas, y que las guarde también.

Entonces se vuelve usted hacia sus ayudantes, y tras fingir durante unos instantes concentrarse para lograr percepción extrasensorial, le dice a cada uno el objeto que ha elegido. La clave reside en el número de cerillas que aún quedan en la mesa. Hay seis permutaciones posibles de los tres objetos tomados por los espectadores; cada una de ellas deja en la mesa distinto número de cerillas sobrantes.

Denotemos los objetos P, M y G (pequeño, mediano, y grande); la tabla de la Figura 11 muestra la permutación correspondiente a cada posible colección de cerillas residuales. (Es imposible que sobren cuatro cerillas. Si viera usted que sobre la mesa quedan cuatro cerillas, alguien se ha equivocado o ha hecho trampa, y es preciso repetir el truco). Se han construido docenas de frases mnemotécnicas para facilitar al mago la tarea de averiguar cómo están distribuidos los objetos. Bachet marcó los objetos con las letras a, e, i, las tres primeras vocales, y construyó la siguiente frase, en francés: (1) Par fer (2) César (3) jadis (5) devint (6) si grand (7) prince.

CERILLAS SOBRANTES	ESPECTADORES		
	1	2	3
1	P	M	G
2	M	P	G
3	P	G	M
5	M	G	P
6	G	P	M
7	G	M	P

Figura 11. La clave del truco de los tres objetos

Las dos vocales de cada palabra o frase bastan para dar la información necesaria. Por ejemplo, si el mago ve cinco cerillas sobre la mesa, la quinta palabra, «devint», le dice que el objeto ***e*** fue tomado por el primer espectador (quien recibió una cerilla) y el objeto ***i*** por el segundo (quien tenía dos cerillas). El objeto restante ***a***

debe encontrarse en el bolsillo del tercer espectador, a quien se le dieron tres cerillas al comienzo del truco.

Otros ilusionistas del siglo XVII, recurriendo también a las tres vocales para designar los objetos, prefirieron recordar las seis permutaciones ayudándose de las dos primeras vocales de cada palabra de la siguiente frase latina: *Salve certa animae semita vita quies*.

En la versión presentada aquí, donde los objetos han sido designados P, M y G, podemos usar la siguiente frase mnemotécnica: (1) Pimpantes (2) mapas (3) plegaba [(4) con] (5) magníficas (6) grapas (7) gemelas. Las dos primeras apariciones de las letras clave, que están en negrita, nos dicen los dos objetos tomados por el primer y segundo espectadores, respectivamente; el tercer objeto corresponde necesariamente al tercer espectador. El lector puede pasar un rato entretenido componiendo otras frases de su invención. Para designar los objetos pueden usarse otras letras, como A, B y C o L, M, P (ligero mediano, pesado), las iniciales de los objetos utilizados, etc. Conviene introducir en la frase una cuarta palabra, de relleno, como hicimos antes, no obstante ser imposible que sobren cuatro cerillas, pues ello permite al ilusionista contar rápidamente las cerillas señalando cada una con una palabra de la frase, sin tener que preocuparse de saltar el número cuatro cuando hayan quedado más de tres. El truco admite una interesante generalización, que data de 1893, para n objetos y n espectadores, fundado en el sistema de numeración de base n. Puede verse en *Mathematical Recreations and Essays*, de W. W. Rouse Bail (página 30 de la edición revisada, 1960).

Un truco telepático más reciente se sirve de un poco de teoría elemental de números (que todavía algunos llaman aritmética) y de una carterita pequeña de 20 cerillas de papel. Vueltos de espaldas, le pedimos a un espectador que arranque del sobre un número cualquiera de cerillas, de 1 a 10, y que se las guarde en un bolsillo. Dígale entonces que cuente para sí el número de las restantes, y que sumando las dos cifras de ese número, arranque de la carterita otras tantas cerillas. (Por ejemplo, si hubiesen quedado 16 cerillas, tendría que sumar 1 y 6, y arrancar 7 fósforos más.) Estas cerillas debe también guardarlas en el bolsillo. Finalmente, el espectador arranca unas cuantas cerillas más, a su capricho, y las guarda en el

puño. Entonces se vuelve usted y recoge la carterita, contando de una ojeada el número de cerillas sobrantes al tiempo de guardársela en el bolsillo. Y ahora podemos decir el número de cerillas que el espectador oculta en su puño. En efecto, tras las dos primeras operaciones siempre sobran en el sobre nueve cerillas. (¿Sabría usted decir por qué?) Bastará por tanto restar de 9 el número de cerillas restantes en el sobrecito para saber el número de las ocultas en la mano.

Las cerillas pueden ser útiles en diversidad de juegos que, como el nim, se desarrollan retirando fichas o cuentas, o en ciertos juegos de apuestas, como el de «los chinos». Pero resultan particularmente adecuadas para el que ahora explicaremos, tanto por su forma como por la facilidad de tenerlas de varios colores. El juego fue inventado por Jurg Nievergelt, matemático especialista en cálculo automático, quien lo ha bautizado «Hit and Run». Por lo general la partida se desarrolla sobre una matriz cuadrada de orden 4 (véase la Figura 12).

Los jugadores disponen inicialmente de unas carteritas de 20 cerillas, cuyas cabezas han de ser de distintos colores, gris y negro, por ejemplo. No deja de ser grata coincidencia que las 40 cerillas de que disponen sean precisamente el máximo necesario. Los jugadores van por turno colocando cada uno una cerilla en uno cualquiera de los segmentos de la matriz. Las negras se proponen construir un camino que conecte los dos lados negros del tablero; las grises lo mismo con los otros dos lados. (Los caminos contrarios pueden cortarse en ángulos rectos). El primer jugador que consiga construir un camino gana la partida.

El juego se llama «Hit and Run», porque cada jugada puede servir tanto para bloquear un camino del adversario (un «hit» en béisbol) como para, al mismo tiempo, prolongar un camino («run»).

El juego tiene superficialmente cierto parecido con el Hex de Piet Hein y con variantes posteriores, como el Bridg-it y el Twixt (puede verse el Bridg-it en Nuevos pasatiempos matemáticos, de Martin Gardner, Alianza Editorial, Madrid), pero la estructura matemática subyacente a él es profundamente diferente.

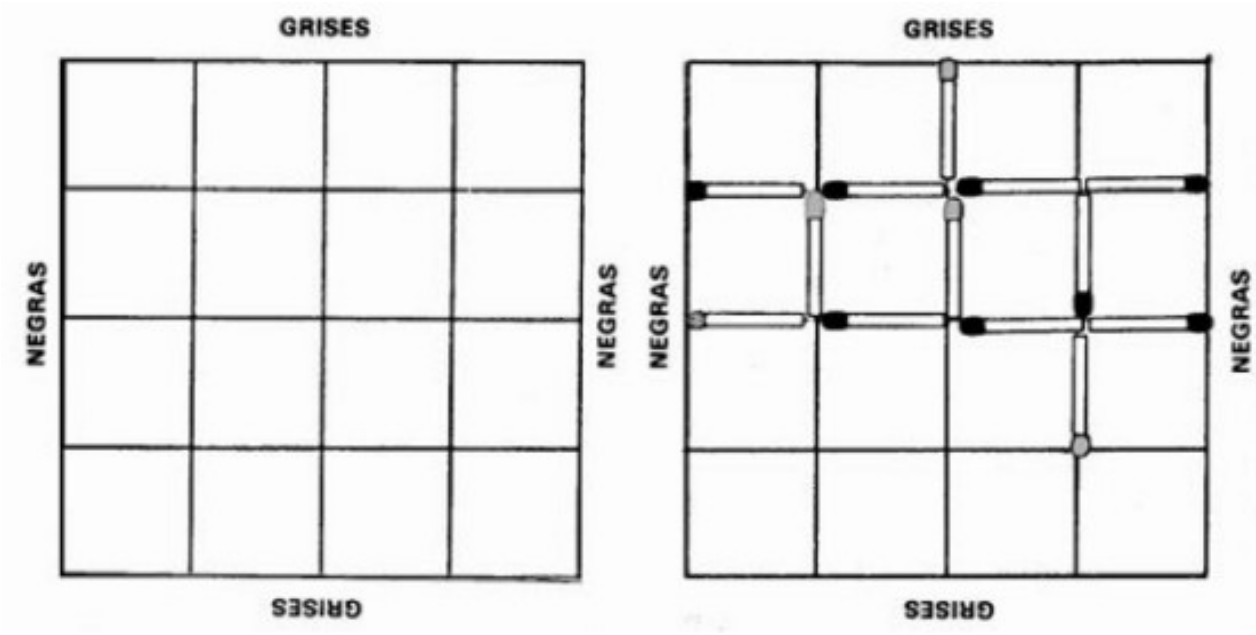


Figura 12. El tablero "hit and run" (izquierda) y una partida terminada (derecha)

Al igual que para el «tres en raya», puede demostrarse fácilmente que si el primero en jugar actúa racionalmente, toda partida de «Hit and Run» acabará ya en victoria de éste, ya en tablas. Supongamos que existiera alguna estrategia que diera siempre la victoria al segundo en jugar. El primer jugador podría entonces apropiársela haciendo un primer movimiento intrascendente, y siguiendo en lo sucesivo la estrategia de victoria. La jugada de espera es en todo caso una ventaja, nunca un inconveniente. Si la estrategia ganadora exigiese más tarde realizar una jugada de espera, como la jugada ha sido realizada ya se efectúa una segunda jugada intrascendente. De esta forma el primer jugador puede ganar. Pero así contradecimos la hipótesis inicial. Por tanto, para el segundo jugador no puede existir una estrategia capaz de garantizarle la victoria. En consecuencia, el primer jugador puede siempre vencer o empatar, si bien la demostración no da información ninguna sobre la táctica a seguir para lograrlo.

En un cuadrado de orden 2 se ve fácilmente que el primer jugador tiene siempre asegurada la victoria (parte izquierda de la Figura 13). El primer movimiento de las negras N1 obliga a las grises a replicar G1. Haciendo N2, las negras se encuentran en situación de completar su camino en una jugada más, y esto de dos formas posibles (marcadas N3); las grises no tienen ahora manera de impedir la victoria

negra en la jugada siguiente. Las negras pueden ganar de forma parecida saliendo en cualquiera de los seis tramos verticales.

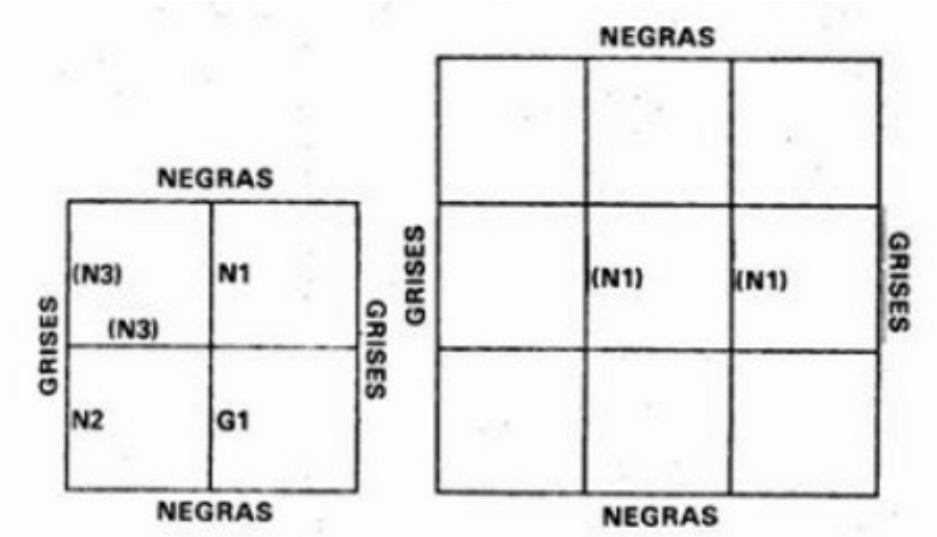


Figura 13. Tácticas vencedoras para el primer jugador con tableros de orden 2 (izquierda) y orden 3 (derecha)

Los lectores podrían entretenerse en demostrar que en el cuadrado de orden 3 también el primer jugador (negras) puede ganar siempre la partida ocupando en la salida cualquiera de los segmentos marcados N1 (parte derecha de la Figura 13).

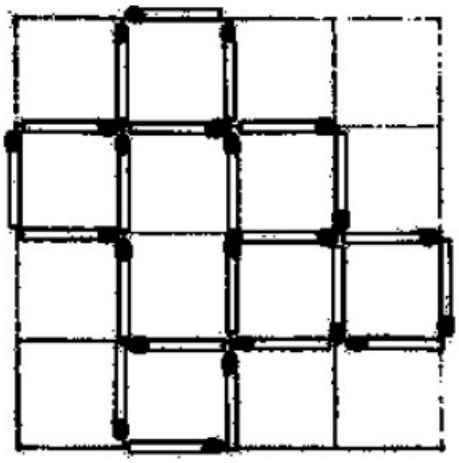


Figura 14. Fin de una partida de "Connecto"

Nievergelt llegó a esta conclusión estudiando exhaustivamente todas las posibilidades. Como este análisis es largo y tedioso, no lo expondremos aquí. Por lo

que yo sé, se ignora todavía si en tableros de orden 4, y no digamos más alto, el primer jugador dispone de estrategia de victoria.

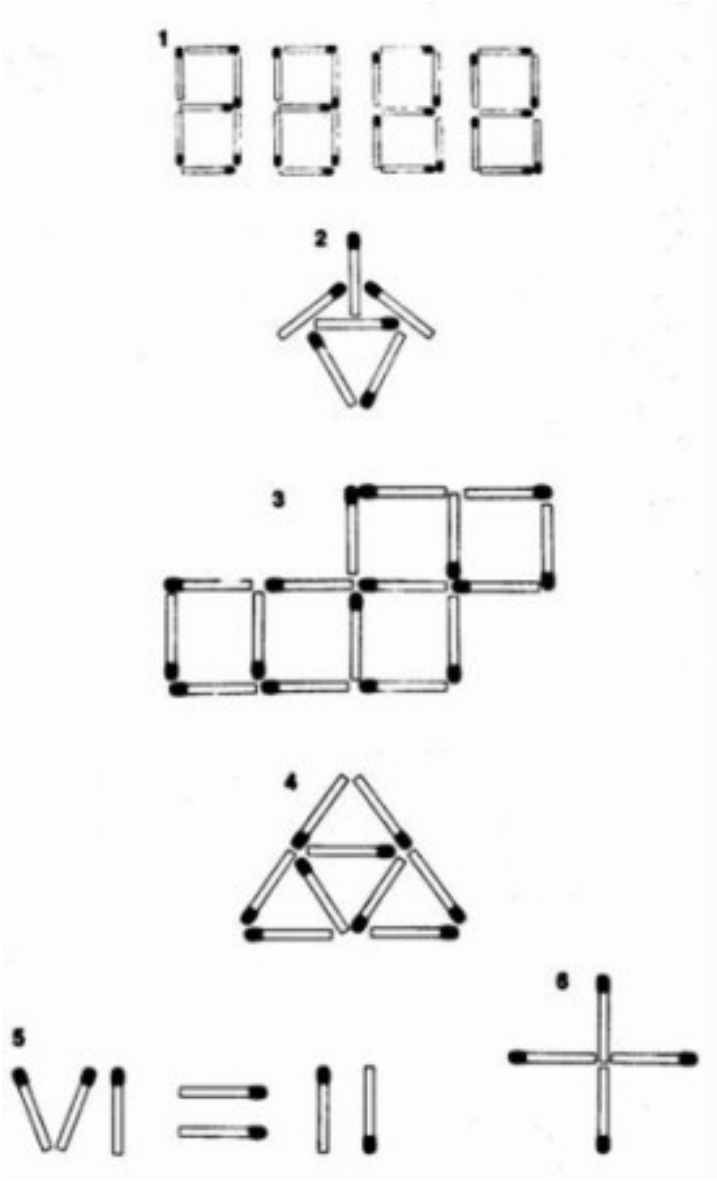


Figura 15. Seis pasatiempos con cerillas

También pueden usarse cerillas de dos colores para jugar a Connecto, descrito por David L. Silverman en su libro *Your Move* (McGraw-Hill, 1971). También aquí dos jugadores van por turnos colocando cerillas en una matriz cuadrada de tamaño arbitrario, pero el objetivo es ahora ser el primero en delimitar una región cerrada de forma cualquiera cuya frontera esté formada por cerillas del color propio.

En la Figura 14 las negras han ganado la partida. ¿Sabrá usted descubrir una sencilla estrategia, dada ya por Silverman, mediante la cual el segundo jugador puede siempre impedir la victoria del primero, incluso sobre matrices infinitas?

Para terminar, he aquí seis entretenidos pasatiempos con cerillas (véase la Figura 15):

1. Retirando once cerillas, dejar seis.
2. La disposición de seis cerillas que vemos define un mapa planar que requiere tres colores si se exige que ningún par de regiones con una cerilla frontera común estén coloreadas del mismo tono. El problema consiste en redisponer las seis y formar un nuevo mapa planar que precise de cuatro colores. Al estar el mapa confinado al plano hay que descartar la sencilla solución tridimensional consistente en el esqueleto de un tetraedro.
3. Cambiando de posición dos cerillas hay que reducir de 5 a 4 el número de cuadrículas unitarias de la figura. No es lícito dejar «cabos sueltos», es decir, cerillas no utilizadas como lados de un cuadrado. Una notable característica de este clásico problemita es que, incluso una vez resuelto, podemos volverlo del revés, volverlo cabeza abajo, o ambas cosas, y seguirá siendo casi tan difícil de resolver como lo era inicialmente.
4. En la disposición de la figura es cosa fácil dejar sólo dos triángulos equiláteros retirando cuatro cerillas. Tampoco es difícil lograr lo mismo eliminando tres. ¿Pero sabrá el lector suprimir sólo dos cerillas y dejar dos triángulos equiláteros? Como antes, tampoco deben quedar cabos sueltos.
5. Moviendo solamente una cerilla debemos lograr una igualdad verdadera. No es válido tachar el signo «igual» con una cerilla y obtener una desigualdad verdadera; la expresión final debe ser una auténtica igualdad.
6. Moviendo solamente una cerilla hay que formar un cuadrado. (La vieja broma de deslizar uno o dos milímetros hacia arriba la cerilla central superior, y dejar en el centro de la cruz un minúsculo hueco cuadrado no es válida. La solución también es humorística, pero la broma va ahora por muy distinto camino.)

Apéndice

En el texto, al describir los dos juegos con cerillas hemos supuesto que sus cabezas son de distinto color; pero si encontrásemos carteritas donde las cerillas, y no sólo sus cabezas, fueran de colores diferentes, seria todavía mejor. Y como es natural, ambos pueden jugarse sobre papel, dibujando una matriz de puntos a conectar con trazos rectos de dos colores.

Nievergelt ha hecho notar que la demostración de Silverman acerca de estrategias vencedoras para el segundo jugador en las partidas de «Connecto» deja de ser válida en otras disposiciones regulares de puntos. Por ejemplo, sobre una red triangular, el primer jugador puede vencer siempre, completando un triángulo unitario a lo más tardar en su séptima jugada.

Nievergelt opina que el Connecto es aún más interesante sobre otras retículas de tipo diferente, y en concreto se pregunta de quién puede ser la victoria sobre una malla cúbica. «Sería interesante, dice, que alguien lograse dar condiciones definibles en términos de teoría de grafos que permitieran clasificar los grafos regulares infinitos según que el primer jugador consiga o no imponer un circuito cerrado.»

Soluciones

El rompecabezas de David Silverman se resuelve observando que todo jugador que gane una partida de Connecto ha de tener forzosamente dos cerillas que formen la letra L en la frontera de su región. El segundo jugador puede impedir que venza el primero, cualquiera que sea el tamaño del tablero, sin más que impedir que su contrario forme una L. Si el primer jugador ocupase la barra vertical de una posible L, el segundo respondería trazando la correspondiente barra horizontal; y si el primero dibujase la barra horizontal, el segundo formaría la vertical. Con esta estrategia el segundo jugador tiene garantizado, como mínimo, un empate.

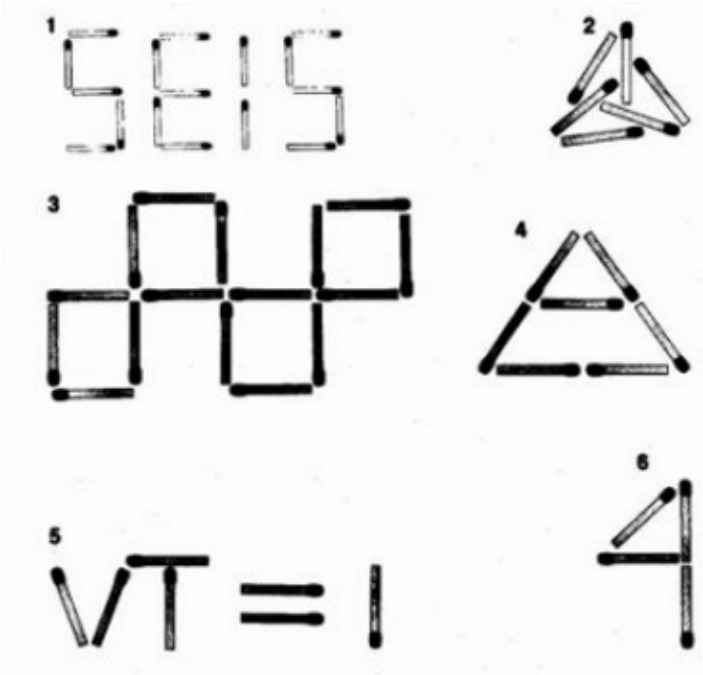


Figura 16. Soluciones a los pasatiempos con fósforos.

En la Figura 16 pueden verse las soluciones de los seis pasatiempos con cerillas; algunos lectores descubrieron una segunda solución para el quinto: el VI del primer miembro se transforma en un XI, que es equivalente, en cifras romanas, al 11 arábigo que figura en el segundo.

Capítulo 3
Esferas e hiperesferas

« ¡Mamá, mamá! ¿Por qué al andar no hago más que dar vueltas?»
«Niño si no te callas te clavo al suelo el otro pie. »
Chiste negro, hacia 1955

Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que se encuentran a distancia dada de un punto fijo. Generalizando esta definición a los espacios euclídeos de dimensión cualquiera, llamaríamos esfera general en dimensión n (o más brevemente, n-esfera) al conjunto de todos los puntos del espacio n-dimensional que se encuentran a distancia dada de un punto fijo del espacio. En los espacios de dimensión uno (las rectas) la 1-esfera está formada por dos puntos situados a una distancia dada, uno a cada lado de un punto central. La 2-esfera no es sino la circunferencia, y la 3-esfera, la figura que ordinariamente llamamos esfera. Conforme aumenta la dimensión tenemos las hiperesferas correspondientes a dimensión 4, 5, 6,...

Imaginemos una varilla de longitud unidad con un extremo ligado a un punto fijo. Si sólo permitimos que la varilla gire sobre un plano, su extremo libre trazará una circunferencia de radio unidad. Dejando en libertad la varilla para voltear en el espacio tridimensional, su extremo describirá una superficie esférica. Supongamos ahora que el espacio tuviese un cuarto eje de coordenadas que cortase en ángulo recto a los otros tres, y que la varilla tuviera libertad para girar en el espacio tetradimensional. Su extremo libre engendraría entonces una 4-esfera unitaria. Es imposible visualizar hiperesferas; empero, sus propiedades pueden estudiarse mediante una sencilla generalización de la geometría analítica, extendiéndola al caso de más de tres coordenadas.

La ecuación canónica de una circunferencia es

$$a^2 + b^2 = r^2$$

donde *r* representa el radio. La ecuación de la esfera es

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2$$

Para la 4-esfera la ecuación sería

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = r^2$$

y así sucesivamente al ir ascendiendo la escala de los hiperespacios euclídeos.
La «superficie» de una *n*-esfera tiene dimensionalidad *n*-1. La «superficie» de un círculo es una línea de una dimensión, la superficie esférica es bidimensional, y la superficie de una 4-esfera es tridimensional. ¿Sería posible que el espacio tridimensional fuese en realidad la hipersuperficie de una gigantesca 4-esfera? ¿Podrían transmitirse mediante vibraciones de semejante hiperesfera fuerzas tales como la gravedad y el electromagnetismo?
Muchos matemáticos y físicos de finales del siglo pasado, tanto ortodoxos como iconoclastas se tomaron en serio esta conjetura. El propio Einstein sugirió la superficie de una 4-esfera como modelo del universo, que sería de esta forma ilimitado y al mismo tiempo, finito. Imaginemos que la superficie de una esfera esté habitada por «*planilandeses*» bidimensionales. Al viajar éstos por la esfera, siguiendo la línea «más recta posible» en una dirección cualquiera, acabarían retornando al punto de partida. Análogamente (sugería Einstein), si una nave espacial partiese de la Tierra y viajase durante suficiente tiempo, siempre en la misma dirección, al cabo retornaría a la Tierra. Un *planilandés* que fuese pintando la superficie de la esfera que habita, trazando círculos concéntricos cada vez más amplios, alcanzaría un punto medio a partir del cual los círculos comenzarían a decrecer, encontrándose él hacia el *interior*, y finalmente, el pintor tendría que pintarse a sí mismo, encerrado en un punto. Análogamente, en el cosmos de Einstein, si los astronautas terrestres empezasen a «cartografiar» el universo, proyectándolo sobre esferas concéntricas siempre en aumento, acabarían en último

extremo encerrados en un pequeño espacio globular, en el polo de la hiperesfera diametralmente opuesto a la Tierra.

Muchas otras propiedades de la hiperesfera son justamente las que podríamos esperar por analogía con esferas de orden inferior. Una circunferencia puede girar alrededor de un punto, el centro; una esfera, alrededor de una recta (un eje), y una 4-esfera puede girar alrededor de un *plano* que contenga a su centro. En general, el eje de una *n*-esfera giratoria es un espacio de dimensión *n*-2. (No obstante, la 4-esfera puede efectuar una doble rotación muy peculiar, que no tiene analogía en los espacios de dimensiones 2 ó 3; puede girar simultáneamente sobre sí misma alrededor de dos planos fijos mutuamente perpendiculares). La proyección de una circunferencia sobre una recta de su mismo plano es un segmento, si bien todo punto del segmento, exceptuados los extremos, se corresponde con dos puntos de la circunferencia. Proyectando una esfera sobre un plano resulta un disco, siendo cada punto interior del disco proyección de dos puntos de la esfera. Al proyectar una 4-esfera sobre nuestro 3-espacio se obtiene una bola maciza, y cada uno de sus puntos interiores es proyección de dos puntos de la superficie de la hiperesfera. Este resultado se generaliza a todos los espacios de dimensión superior.

Otro tanto puede decirse para las secciones transversales. Al cortar una circunferencia con una recta, la intersección es una 1-esfera, esto es, un par de puntos. Al cortar una esfera con un plano la sección producida es una circunferencia. Cortando una 4-esfera con un hiperplano (de dimensión 3) la sección resultante es una 3-esfera. (Es imposible dividir en dos una hiperesfera cortándola con un 2-plano. Una *hipermanzana*, pasada de parte a parte por un plano bidimensional, permanece de una pieza). Imaginemos una 4-esfera que fuera atravesando lentamente nuestro espacio. La veríamos aparecer como un punto y en seguida transformarse en una bolita que progresivamente iría engordando hasta su máxima sección, para ir luego adelgazando hasta esfumarse.

Una esfera de dimensión cualquiera, construida con material lo suficientemente flexible, puede ser siempre vuelta del revés, de adentro a afuera, sumergiéndola en el espacio de dimensión inmediatamente superior. De igual forma que nosotros podemos retorcer un delgado aro de goma hasta que su cara interior pase a ser exterior, y recíprocamente, también una *hipercriatura* podría asir una de nuestras

pelotas de tenis y volverla, como un guante, del revés, manipulándola a través del hiperespacio. Y podría hacerlo de una sola maniobra o también comenzando por un punto de la pelota, irla volviendo del revés a partir de él, hasta dejar toda la bola con el interior expuesto al exterior.

Entre las fórmulas que es posible generalizar fácilmente a esferas de dimensión arbitraria, una de las más elegantes es la que relaciona los radios del número máximo de esferas *n*-dimensionales mutuamente tangentes. En el plano es imposible situar más de cuatro circunferencias de forma que cada una toque a las demás, siendo tangente cada par en un punto diferente. Hay dos situaciones posibles (dejando aparte casos degenerados, donde una de las circunferencias es de radio infinito, convirtiéndose así en una línea recta): o bien tres circunferencias rodean a una cuarta, menor, (*Figura 17, izquierda*), o bien tres están contenidas en la cuarta (*Figura 17, derecha*).

Frederick Soddy, químico inglés descubridor de los elementos isótopos (lo que le valió el premio Nóbel), expresó este hecho como sigue, en la primera estrofa de su poema *The Kiss Precise* publicado en la revista *Nature* (el 20 de junio de 1936, p. 1.021), y aquí traducido con alguna impertinencia:

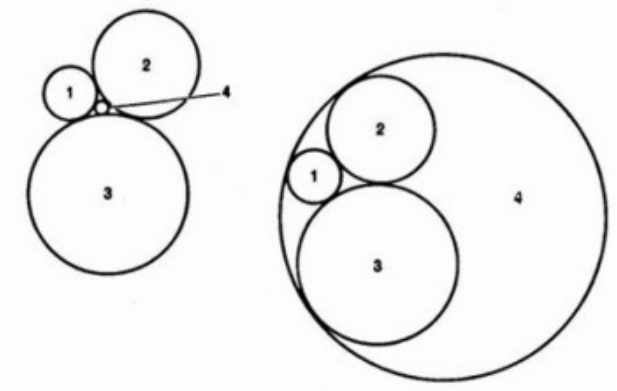


Figura 17. Hállese el radio de la cuarta circunferencia

Pueden besarse los labios, dos a dos,
sin mucho calcular, sin trigonometría;
mas ¡ay! no sucede igual en la Geometría,
pues si cuatro círculos tangentes quieren ser
y besar cada uno a los otros tres,

para lograrlo habrán de estar los cuatro
o tres dentro de uno, o alguno
por otros tres a coro rodeado.
De estar uno entre tres, el caso es evidente
pues tres veces son todos besados desde afuera.
Y el caso tres en uno no es quimera,
al ser este uno por tres veces besado internamente.

En la siguiente estrofa de su poema, Soddy da la sencilla fórmula que relaciona los radios de los círculos. La curvatura es la inversa del radio; así, un círculo de radio 4 tiene curvatura 1/4. Cuando un círculo es contactado desde su interior, como le sucede al círculo grande que contiene a los otros tres, se dice que su curvatura es cóncava, y a tal curvatura se le atribuye signo negativo. Así dice Soddy en su segunda estrofa:

Cuatro círculos llegaron a besarse,
cuanto menores tanto más curvados,
y es su curvatura tan sólo la inversa
de la distancia desde el centro.
Aunque este enigma a Euclides asombrara,
ninguna regla empírica es necesaria:
al ser las rectas de nula curvatura
y ser las curvas cóncavas tomadas negativas,
la suma de cuadrados de las cuatro curvaturas
es igual a un medio del cuadrado de su suma.

Denotando a, b, c y d los recíprocos de los cuatro radios, la fórmula de Soddy es

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c + d)^2.$$

El lector no debería ya tener dificultad en calcular el radio del cuarto circulo osculatriz de cada ilustración. En la tercera y última estrofa del poema de Soddy, la fórmula es generalizada a cinco esferas mutuamente osculatrices:

Espiar de las esferas
los enredos amorosos
pudiérale al inquisidor
requerir cálculos tediosos,
pues siendo las esferas más «corridas»
a más de un par de pares
una quinta entra en la «movida».
Empero, siendo signos y ceros como antes
para besar cada una a las otras cuatro.
El cuadrado de la suma de las cinco curvaturas
ha de ser triple de la suma de sus cuadrados.

En el número del 9 de enero de 1937 (Vol. 139, pág. 62), la redacción de *Nature* acusaba recibo de varias cuartas estrofas que generalizaban la fórmula de Soddy a espacios *n*-dimensionales, aunque publicó solamente la que sigue, debida a Thorold Gosset, abogado inglés aficionado a las matemáticas.

No debemos empero confinar nuestros cuidados
a los simples círculos, esferas y planos,
sino elevarnos a n-espacios e hipercurvaturas
donde también las múltiples tangencias
son seguras.
En n-espacios, los pares de tangentes
son hiperesferas, y es verdad,
mas no evidente,
cuando n + 2 de tales se osculean
cada una con n + 1 compañeras
que el cuadrado de la suma de todas las curvaturas

es n veces la suma de sus cuadrados.

Dicho en prosa simple y llana, en el espacio *n*-dimensional el máximo número de hiperesferas mutuamente tangentes es *n* + 2, y al multiplicar por *n* la suma de los cuadrados de todas sus curvaturas resulta el cuadrado de la suma de las curvaturas. Más tarde se ha sabido que la fórmula correspondiente a cuatro circunferencias era ya conocida por Descartes, pero Soddy la redescubrió y, según parece, fue el primero en generalizarla para esferas.

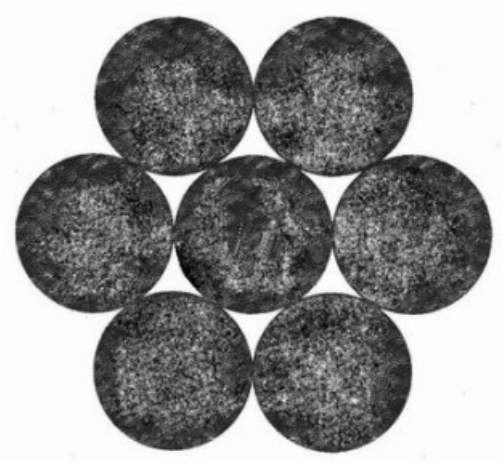


Figura 18. Seis círculos unitarios tangentes a un séptimo

Vale la pena notar que la fórmula general es aplicable incluso a tres «esferas» bipuntuales del espacio unidimensional que sean mutuamente tangentes: dos segmentos de recta que se tocan, «dentro» de un tercero que es la suma de ambos. Para los aficionados a las matemáticas recreativas, la fórmula de Descartes - Soddy es un auténtico don del cielo. Casi todos los problemas sobre círculos o esferas mutuamente tangentes ceden pronto frente a ella. He aquí uno muy bonito. Tres pomelos perfectamente esféricos, todos de 3 cm de radio, descansan sobre un mostrador plano. También sobre el mostrador, pero debajo de los pomelos y tangente a ellos, se tiene una pequeña naranja perfectamente esférica. ¿Qué radio tendrá la naranja?

En cambio, los problemas sobre empaquetamiento de esferas unitarias no admiten generalizaciones sencillas al ir ascendiendo por el escalafón de espacios de

dimensión cada vez mayor; en realidad, se tornan cada vez más difíciles. Tomemos por ejemplo el problema de hallar el número máximo de esferas unitarias que pueden ser tangentes a otra esfera unitaria también. Para circunferencias tal número es seis.

Para esferas ordinarias es 12, pero no pudo probarse que así fuera hasta 1874. La dificultad se debe a que al colocar 12 esferas en torno a una decimotercera, con sus centros en los vértices de un icosaedro imaginario (*Figura 19*), entre cada par de esferas queda espacio vacío.

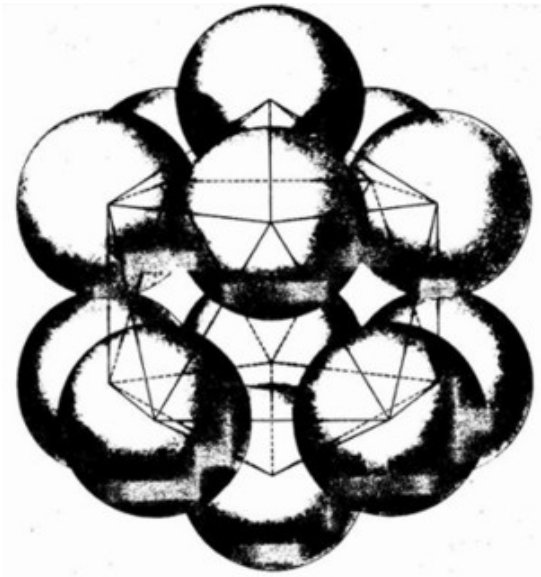


Figura 19. Doce esferas unitarias tangentes a una decimotercera

El espacio vacío es ligeramente superior al necesario para alojar una decimotercera admitiendo que fuera posible desplazar adecuadamente las 12 primeras, manteniendo el contacto y el empaquetamiento. Sí el lector se toma la molestia de bañar de goma arábiga 14 pelotas de ping-pong, verá que puede fácilmente adherir a una de ellas otras 12, no estando claro si se podrá o no incluir una más sin forzarlas ni deformarlas indebidamente. He aquí una cuestión equivalente (¿sabrá el lector explicar por qué?): ¿podremos pegar sobre una esfera 13 discos de papel, que cubra cada uno un arco de 60 grados de un círculo máximo, sin que se traslapen unos con otros?

H. S. M. Coxeter, al escribir sobre *«The Problem of Packing a Number of Equal Nonoverlapping Circles on a Sphere»* (en *Transactions of the New York Academy of Sciences*. Vol. 24, enero de 1962, pp. 320 - 31), cuenta la historia de la que podría ser la primera discusión documentada sobre el problema de las 13 esferas. David Gregory, astrónomo en Oxford y amigo de Isaac Newton, anotó en su diario, en 1694, que Newton y él habían estado discutiendo sobre la cuestión. Habían empezado estudiando cómo están distribuidas por el firmamento las estrellas de distintas magnitudes, y de ahí habían pasado a preguntarse si una esfera de radio unitario podría o no estar en contacto con otras 13 iguales a ella. Gregory opinaba que sí; Newton disentía. Como escribe Coxeter, «tuvieron que transcurrir 180 años hasta que R. Hoppe lograra demostrar que Newton tenía razón». Desde entonces han sido publicadas otras demostraciones más sencillas, la más reciente, en 1956, la del matemático británico John Leech.

¿Cuántas hiperesferas unitarias del espacio tetradimensional pueden ser tangentes a otra de su mismo tamaño? Se desconoce todavía si la solución será 24, 25 ó 26. Tampoco se conoce la respuesta en ninguno de los espacios de dimensión superior. Lo único que se sabe es cuáles son los empaquetamientos más densos para espacios de dimensiones de 4 a 8, suponiendo que los vértices de las hiperesferas definan retículas regulares. De tales empaquetamientos resultan las cotas inferiores 24, 40, 72, 126 y 240 para los números de esferas en contacto con otra dada. De no estar sujetos a empaquetamientos «regulares», se ha conjeturado que las cotas superiores correspondientes son 26, 48, 85, 146 y 244. En los espacios de dimensión mayor que 8, ni siquiera se conocen los empaquetamientos regulares de densidad máxima. Admitiendo que los centros no formen retículos regulares, Leech y N. J. A. Sloane informaron en 1970 de que sí es posible hacer que 306 esferas iguales contacten con otra idéntica en dimensión 9, y de que 500 lo hagan en dimensión 10. (Las cotas superiores correspondientes son 401 y 648).

¿Por qué esa dificultad en el espacio de dimensión 9? Tal vez podamos arrojar un poco de luz, pálida luz, sobre los curiosos giros y recovecos que presenta el espacio de dimensión 9 examinando ciertas paradojas relativas a hipercubos e hiperesferas. En un cuadrado de lado unidad podemos alojar, yendo desde un vértice hasta el diagonalmente opuesto, un segmento de longitud $\sqrt{2}$. Análogamente, en un cubo de

lado unidad podemos encajar un segmento de longitud $\sqrt{3}$. La distancia máxima entre dos vértices de un *n*-cubo unitario es de $\sqrt{n}$ y como las raíces cuadradas crecen sin límite, resultará que una varilla de longitud *dada*, por grande que sea, cabrá en el seno de un *n*-cubo unitario, con tal de tomar *n* suficientemente grande. Una caña de pescar de 5 metros de larga cabe, sin plegarla, en el hipercubo unitario del espacio de dimensión 25. Y otro tanto puede decirse para objetos de más de una dimensión. Así, un cubo es capaz de alojar cuadrados más grandes que su cara. Un 4-cubo puede acomodar en su interior cubos tridimensionales mayores que su hipercara cúbica. Un cubo del espacio de dimensión 5 dará cabida en su seno a cuadrados y cubos mayores de los que cabrían en otros cubos de igual arista pero menor dimensionalidad. Un elefante, o si se quiere, una catedral, cabe con holgura en un cubo *n*-dimensional cuyas aristas no sean mayores que las de un terrón de azúcar... con tal de que *n* sea suficientemente grande.

Mas la situación cambia de raíz para las *n*-esferas. Por muy grande que sea *n*, jamás podrán las *n*-esferas acomodar varillas de longitud mayor que el doble de su radio. Y al mismo tiempo sucede algo muy curioso con su volumen (o hablando propiamente, con su contenido *n*-dimensíonal) al ir creciendo la dimensión *n*. La superficie del círculo de radio 1 es, evidentemente π. En el espacio tridimensional, el volumen de la esfera de radio 1 es

$$4/3\ \pi\ r^3 = 4/3\ \pi = 1.33333\ \pi = 4.1899$$

El hipervolumen de la 4-esfera es 4,9 +. En el espacio de dimensión 5 el volumen es aún mayor, 5,2 +. Pero en el espacio de dimensión 6 el hipervolumen es de sólo 5,1 + , y a partir de ahí, continúa decreciendo sistemáticamente, tanto así, que cuando *n* tiende a infinito, el hipervolumen, de la *n*-esfera unitaria tiende a cero.

Se siguen de aquí resultados que podríamos calificar de «*extraterrestres*». David Singmaster, escribiendo sobre «Piezas redondas en agujeros cuadrados, y piezas cuadradas en agujeros redondos» («*On Round Pegs in Square Holes and Square Pegs in Round Holes*», *Mathematics Magazine*, (vol. 37, noviembre de 1964, pp. 335-37) llegó a la conclusión de que las piezas redondas encajan mejor en agujeros cuadrados que a la inversa, porque la razón de la superficie del círculo a la de su

cuadrado circunscrito ($\pi/4$) es mayor que la razón del cuadrado inscrito al círculo que lo contiene ($2/\pi$). Análogamente, podemos demostrar que una bola encaja mejor en una caja cúbica que un cubo en un envase esférico, si bien la diferencia de los cocientes es algo menor. Singmaster descubrió que la diferencia sigue decreciendo hasta los espacios de dimensión 8; a partir de ahí se cambian las cosas, y en el espacio de dimensión 9, la razón de la *n*-bola al *n*-cubo es menor que la relación del *n*-cubo a la *n*-bola. Dicho de otra forma, la condición necesaria y suficiente para que una *n*-bola esté mejor envasada en un *n*-cubo que un *n*-cubo en una *n*-bola es que *n* sea menor o igual que 8.

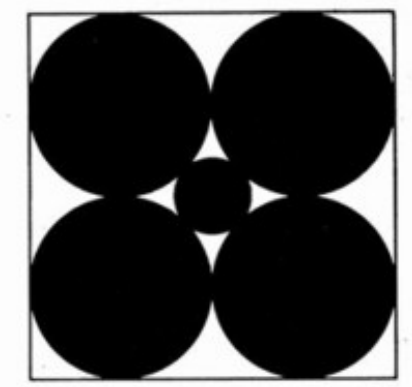


Figura 20. Cuatro discos que cercan a otro de radio √2 - 1

La misma curiosa extravagancia del espacio de dimensión 9 se manifiesta en una paradoja descubierta por Leo Moser y no publicada hasta ahora. En un cuadrado de lado 4 podemos alojar cuatro discos unitarios (*véase la Figura 20*); en el centro entra todavía un circulo de radio √2 - 1.

Análogamente, podemos encajar ocho esferas unitarias contra los rincones de una caja cúbica de arista 4 (*véase la Figura 21*).

La máxima esfera que podrá alojarse en el espacio central comprendido entre las ocho tiene radio √3 - 1. La situación se generaliza de forma evidente: en un 4-cubo de arista 4 podemos acomodar 16 esferas unitarias de dimensión 4, más una esfera central de radio √4 - 1, o sea 1, con lo que la esfera central tiene ahora el mismo tamaño que las otras. En general, en los vértices de un *n*-cubo de arista 4 pueden alojarse 2*n* esferas unitarias y además, presumiblemente, otra esfera central de radio √n - 1. Veamos, sin embargo, qué sucede al llegar al espacio de dimensión 9.

La hiperesfera central tiene radio $\sqrt{n} - 1 = 2$, que es igual a la semi-arista del hipercubo. La esfera central llena ahora el hipercubo, siendo tangente a cada una de las hipercaras en su centro, pero de todas formas, deja suficiente espacio en cada uno de los $2^9 = 512$ vértices como para alojar ¡512 esferas unitarias de dimensión 9!

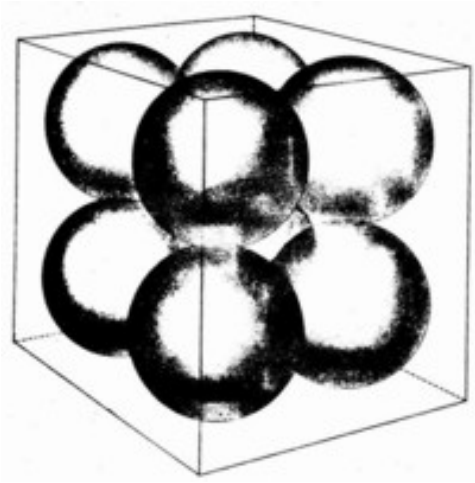


Figura 21. Ocho esferas unitarias dejan sitio para otra √3-1

Otra paradoja relacionada con ésta, descubierta también por Leo Moser, se refiere a tableros de ajedrez *n*-dimensionales. Imaginemos todos los cuadros negros de un damero encerrados en círculos circunscritos (*véase la Figura 22*). Supongamos que cada casilla tenga lado 2 y área 4. Cada círculo tendrá entonces radio √2, y área 2π. En cada casilla, el área de la región que permanece blanca (que no forma parte de un círculo) es $8 - 2\pi = 1{,}71$ +. En la generalización a tres dimensiones, cada celdilla negra de un «*damero cubiculado*» está englobada en una esfera circunscrita. Cada cubículo tiene volumen 8, y el volumen de cada esfera, cuyo radio es √3 , es $4\pi\sqrt{3}$-, aunque el volumen de la región libre de las cuadrículas blancas no es tan fácil de calcular, porque las seis esferas adyacentes a ellas se interceptan entre sí.

Fijémonos ahora en un retículo tetradimensional de hipercubos de arista 2, cuyos cubículos supondremos alternativamente coloreados de blanco y negro, de forma que cada uno de ellos estará rodeado por ocho hipercubículos de color contrario. En torno a cada hipercubículo negro está circunscrita una hiperesfera.

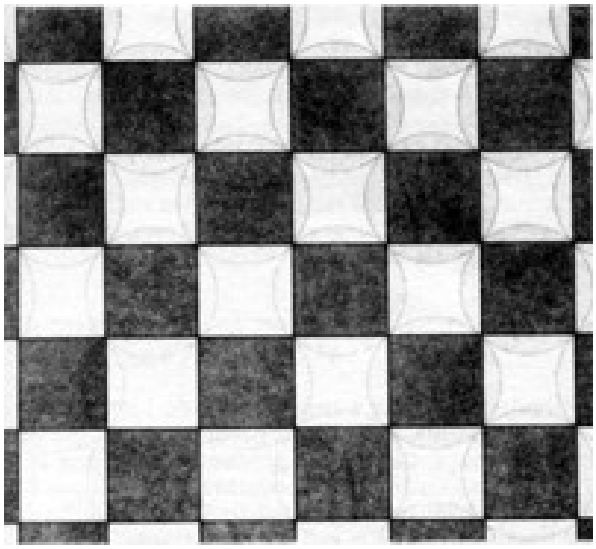


Figura 22. Problema del hiperdamero de Leo Moser

¿Qué volumen tiene la región libre de cada cubículo blanco? La respuesta, sorprendentemente sencilla, puede averiguarse rápidamente sin conocer siquiera el volumen de la hiperesfera.

Soluciones

El primer problema consistía en hallar los radios de dos círculos, cada uno de los cuales es tangente a tres circunferencias, mutuamente tangentes, de radios 1, 2 y 3 unidades. Valiéndose de la fórmula explicada en el capitulo

$$2\,(1 + 1/4 + 1/9 + \ldots + 1/x^2) = (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/x)^2$$

siendo x el radio del cuarto círculo, se obtienen las soluciones 6/23 (radio del circulo pequeño) y 6 (para el círculo grande).

El segundo problema se refería a tres pomelos y una naranja; todas descansan sobre un mostrador plano y son mutuamente tangentes. Los pomelos son de igual tamaño, y de 3 cm de radio. ¿Qué tamaño tiene la naranja? El plano sobre el que descansan las cuatro esferas puede considerarse como una quinta esfera de radio infinito, tangente a las otras cuatro. Por tener curvatura nula, el término correspondiente a ella desaparece de la fórmula que relaciona los recíprocos de los

radios de cinco esferas mutuamente tangentes. Sea *x* el radio de la naranja. Tendremos la ecuación:

$$3\,(1/3^2 + 1/3^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/x^2) = (1/3 + 1/3 + 1/3 + \ldots + 1/x)^2$$

de donde resulta que *x* tiene el valor de 1 cm.

Evidentemente, el problema puede resolverse por otros procedimientos. Cuando fue propuesto (Problema 46, en el *Pi Mu Epsilon Journal*, noviembre de 1952) Leon Bankoff lo resolvió como sigue, siendo *R* el radio de las esferas grandes y *r* el de la esfera más pequeña:

«La esfera pequeña, de radio *r*, descansa sobre un punto de la mesa situado a igual distancia de los puntos de contacto de cada una de las esferas grandes con el plano del tablero. Se encuentra por tanto en el circuncentro de un triángulo equilátero de lado 2*R*. Por consiguiente (*R* + *r*) es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuya altura mide (*R, r*) y cuya base es de 2*R*√*3/3*. Por ello,

$$(R + r)^2 = (R - r)^2 + 4R^2/3$$

La solución de la paradoja de Leo Moser sobre el hiperdamero cúbico del espacio tetradimensional es que las hiperesferas que engloban los cubículos negros no dejan libre ninguna porción de los cubículos blancos. El radio de cada hiperesfera es √4 o sea, 2. Como las aristas de las hipercasillas miden 2 unidades, vernos enseguida que cada una de las ocho hiperesferas que cercan la celdilla blanca llegan a pasar por el centro de la casilla. Las ocho hiperesferas se traslapan entre sí, sin dejar ninguna porción del cubículo blanco fuera de todas ellas.»

Capítulo 4
Pautas de inducción

Entre los juegos y pasatiempos son muchos los que muestran atisbos del proceso mental llamado «inducción», que es el curioso procedimiento por el cual los científicos, tras observar que algunas avestruces lucen largos cuellos, concluyen que todas las avestruces tendrán asimismo cuellos largos. En el poker y en el bridge, por ejemplo, los jugadores van observando el juego en busca de pistas e indicios que les permitan formarse conjeturas probables acerca de las manos de sus contrarios. Si un criptógrafo, al descifrar un mensaje, llegase a sospechar que «BCTVSEP» es «ABSURDO», reconociendo en ella una pauta o regla de formación, lo que hace es poner a prueba esta hipótesis, tanteando con estas letras en algún otro párrafo del mensaje. Hay un viejo juego de salón que consiste en ir pasando de mano en mano unas tijeras por un corro de jugadores. Al entregárselas al vecino, cada jugador dice «cruzadas» o «juntas»; los ya familiarizados con el truco añaden entonces «cierto» o «falso», y la broma continúa hasta que todos han descubierto la regla, por inducción. Las tijeras no son más que para despistar: los jugadores tienen que decir «cruzadas» si y solamente si ellos tienen las piernas cruzadas.

Otros conocidos juegos, como la clásica «batalla de barcos» de los escolares, presentan mayores analogías con el método científico. De todas formas, el primer juego de inducción deliberadamente ideado para ello fue el de «Eleusis», juego de naipes inventado por Robert Abbott y que expliqué por vez primera en mi sección de *Scientific American* de junio de 1959. (Hay una exposición más amplia en *Abbotts New Card Games*, publicado por Stein and Day en 1963, y en edición de bolsillo, por Funk & Wagnalls, en 1969).

El juego «Eleusis» interesó a muchos matemáticos, y principalmente a Martin D. Kruskal, de la Princeton University, quien preparó una excelente variante, *Delphi, a Game of Inductive Reasoning*, que explicó en un folleto editado a expensas propias.

En «Eleusis» y «Delphi» hay una regla secreta que estipula el orden en que debe jugarse cada naipe. La regla hace las veces de una ley natural; los jugadores deben conjeturar la ley, por inducción, y después, lo mismo que los científicos someter a prueba su conjetura. En este capítulo expondré un juego de inducción de nuevo

cuño, llamado «Pautas» (*Patterns*), creado por Sidney Sackson, que éste explica en su delicioso libro *A Gamut of Games*.

Se juega a «pautas» con lápiz y papel. El número de participantes puede ser cualquiera, pero no es conveniente que exceda de seis. Aunque es notablemente distinto de «Eleusis» y «Delphi», comparte con aquéllos la misma llamativa semejanza con el método científico; tanto, que muchos de los espinosos problemas que desde los días en que David Hume dejó claro que la inducción no tiene fundamento en la lógica han venido aguijando a los filósofos de la ciencia tienen en el juego interesantes paralelos.

Cada jugador dibuja un casillero cuadrado, de seis por seis. Uno de los jugadores, llamado «diseñador» (el papel de diseñador cambia de manos tras cada partida) rellena en secreto sus 36 casillas trazando en cada una un símbolo, que puede ser de cuatro clases. Sackson propone los cuatro modelos que vemos en la Figura 23, pero pueden servir otros cuatro de formas cualesquiera.

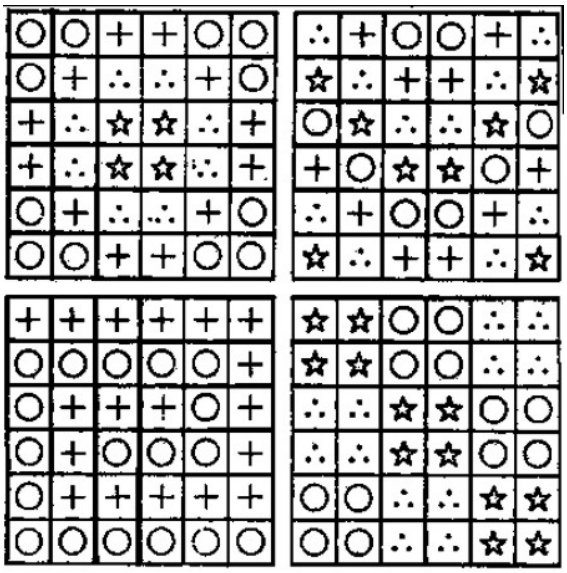


Figura 23. Patrones del juego de inducción de Sidney Sackson. Todos muestran simetría de algún tipo

El diseñador, que asume el papel de la Naturaleza, el Universo o la Divinidad, tiene completa libertad para rellenar las casillas como guste; puede trazar motivos fuertemente o débilmente organizados; motivos sólo parcialmente ordenados, o

motivos enteramente caóticos. No obstante (y en este aspecto Sackson retorna la lúcida y original idea de Abbott) el sistema de puntuación está pensado de forma que impela al diseñador a crear patrones, regularidades de, la naturaleza, lo suficientemente sencillos como para ser descubiertos por al menos un jugador, y lo suficientemente difíciles como para impedir que al menos otro sea incapaz de conseguirlo.

Cuatro motivos típicos, tomados del libro de Sackson, han sido reproducidos en la Figura 23, colocados más o menos por orden de dificultad. Todos muestran alguna forma de simetría o regularidad visual. Cuando los jugadores sean muy avezados, o tengan buena preparación matemática, pueden usarse también motivos asimétricos. Por ejemplo, el diseñador podría ir rellenando las casillas, de izquierda a derecha, y de arriba a abajo, poniendo un signo «más» en todas las cuadrículas de lugares primos, y estrellas en las restantes. El sistema para confeccionar el «diseño patrón» está íntimamente relacionado con la capacidad del diseñador para estimar la habilidad de los otros jugadores, porque, como veremos, la puntuación del diseñador es máxima cuando uno de los jugadores logra lucirse, y otro, en cambia fracasa estrepitosamente. Por cierto, ¿sabrá el lector discernir la idea que ha servido para confeccionar el motivo asimétrico de la Figura 24?

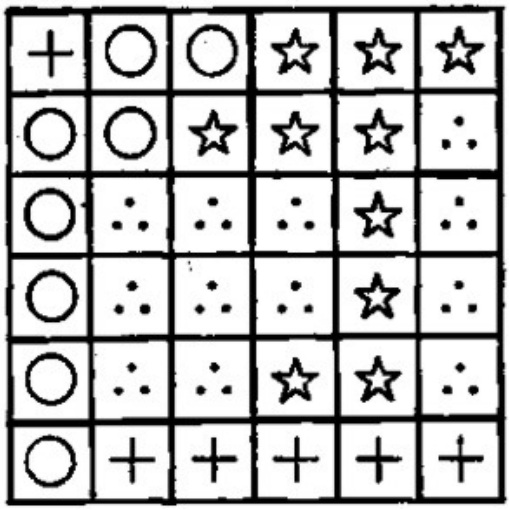


Figura 24. ¿Qué idea inspira este motivo?

El diseñador pone su hoja boca abajo, sobre la mesa. Cualquiera de los jugadores puede irle haciendo preguntas; para ello dibuja en su casillero un trazo oblicuo en el

ángulo inferior izquierdo de las casillas cuyo contenido desee conocer. Esta hoja se le pasa boca abajo al diseñador, quien debe rellenar con el símbolo correcto todas las casillas solicitadas. No hay turnos. Cada jugador puede pedir tanta información como desee, sin limitación del número de casillas. Cada petición representa una observación de la naturaleza o si se quiere, un experimento, que no es sino una forma de realizar observaciones en condiciones controladas; las respuestas del diseñador equivalen a los resultados de tales observaciones. Los jugadores podrían pedir información sobre el contenido de las 36 casillas y disponer inmediatamente de la configuración completa, pero eso nada les reportaría, pues su puntuación sería entonces cero.

Cuando un jugador cree haber adivinado el patrón maestro, dibuja símbolos en todas las casillas que quedan todavía en blanco. Para facilitar la localización de estos símbolos conjeturados se los encierra entre paréntesis. Si el jugador se ve incapaz de adivinar el motivo, puede salirse de la partida, con puntuación cero. En ocasiones es recomendable hacerlo así, porque puede ahorrarle una puntuación negativa, y además, inflinge al diseñador una penalización.

Una vez que todos los jugadores, bien han rellenado la totalidad de sus 36 casillas, bien han abandonado la partida, el diseñador vuelve boca arriba su motivo patrón. Cada jugador contrasta sus propias marcas con las del modelo, anotándose un punto positivo por cada acierto y uno negativo por cada error. La suma algebraica de unos y otros da su puntuación en la partida. Si hizo pocas preguntas al diseñador y supo atinar en todo o casi todo el modelo, su puntuación será elevada. Si el número de fallos es mayor que el de aciertos, su puntuación será negativa. Las altas puntuaciones corresponderían a científicos brillantes (o simplemente, afortunados). Las bajas, a los mediocres o los impulsivos (y a veces, a los simplemente desafortunados), que se lanzan a publicar teorías sin suficiente fundamento. Los abandonos corresponden a científicos mediocres y excesivamente cautelosos, que prefieren no aventurarse a formar hipótesis ninguna.

La puntuación del díseñador es el doble de la diferencia entre la mejor y la peor de las logradas por los jugadores. Cuando hay abandonos su puntuación sufre merma: si sólo hay un abandono se le restan cinco puntos; cada abandono más le cuesta

otros diez puntos. Sackson da los siguientes ejemplos, donde D es el diseñador, y A, B, C son los jugadores:

Si A puntúa 18, B 15, y C 14, la puntuación de D sería 8, doble de la diferencia entre 18 y 14.
Si A puntúa 18, B 15, y C, 2, la puntuación de D sería 40, doble de la diferencia entre 18 y, 2.
Si A puntúa 12, B 7 y C se sale de la partida (puntuación 0), la puntuación de D sería 19, que es el doble de la diferencia entre 12 y 0, con deducción de 5 puntos, debidos al único abandono.
Si A logra 12 puntos, y B y C abandonan, D conseguiría 9 puntos, que es el doble de la diferencia entre 12 y 0, con deducción de cinco puntos por el abandono del primer jugador y de diez por el del segundo.
Si los tres jugadores abandonan, D recibe la puntuación 25. Su puntuación básica es 0, a la que debemos descontar 25 puntos, en vista de los tres abandonos.

Para hacernos una idea de cómo razona un jugador experimentado, echaremos un vistazo a una partida auténtica, jugada por Sackson (véase la Figura 25).

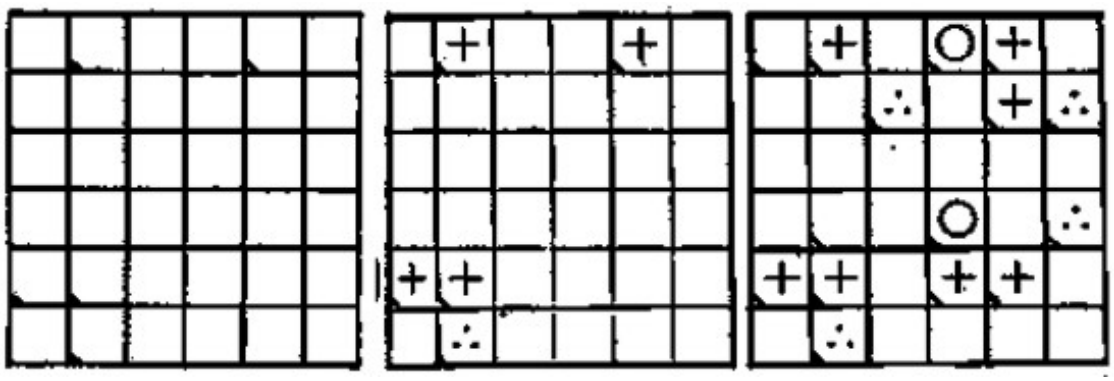


Figura 25. Tres etapas de tanteo del motivo patrón

Sus cinco preguntas iniciales tienen la finalidad de sondear el motivo, en busca de elementos de simetría (izquierda). Vemos luego la hoja, con los símbolos pedidos (centro). Una serie de nuevas preguntas recaban más información (derecha). Da la impresión de que el modelo fuese simétrico con respecto al eje diagonal que va

desde el ángulo superior izquierdo al inferior derecho. Como todavía no ha salido ninguna estrella, Sackson induce que el modelo no las contiene.

Viene ahora ese instante crucial, del que tan poco sabemos, que se produce la corazonada, el golpe de vista, el chispazo de intuición, que simboliza la formulación de una hipótesis por el científico imaginativo e impuesto en su materia. Sackson conjetura que la casilla del ángulo superior izquierdo contiene un círculo, que las tres casillas que lo flanquean tienen todas signos «más» y que al ir descendiendo por la diagonal los signos «más» están escoltados por signos «triple punto», repitiéndose la pauta cada vez con bordes más anchos, compuestos por estos tres símbolos, en el mismo orden. Para contrastar su teoría haciendo tan pocas preguntas nuevas como sea posible, Sackson decide pedir información tan sólo acerca de otras dos casillas más, las dos que vemos vacías, marcadas con líneas oblicuas en el estadillo de la derecha en la Figura 25. Si estas dos casillas del modelo no contuvieran círculos, la conjetura de Sackson sería errónea.

Como dice el filósofo Karl Popper, la conjetura «más fuerte» es la que más fácilmente puede ser invalidada; Popper opina que esta noción es equivalente a la de conjetura «más sencilla». En el juego de Sackson, la conjetura más fuerte (y la más sencilla) es que todas las casillas contienen un mismo símbolo, una estrella, pongamos por caso. Es una hipótesis muy fuerte, pues para invalidarla es suficiente con que al tomar una sola muestra en un lugar cualquiera se obtenga un símbolo distinto del esperado. La conjetura más débil es que dentro de cada casilla haya uno de los cuatro símbolos. Semejante hipótesis puede ser plenamente confirmada. Empero, puesto que ningún experimento puede falsearla, es una hipótesis verdadera, aunque inútil, desprovista, por completo de contenido empírico, porque nada puede decirnos acerca del modelo patrón.

Los dos círculos resultan encontrarse donde Sackson esperaba; ello refuerza lo que el filósofo Rudolf Carnap llama «grado de confirmación» de la hipótesis de Sackson en relación con la evidencia total de que dispone. Sackson decide entonces dar el paso definitivo y «publicar» la conjetura que ha inducido. Rellena las casillas aún vacías de su estadillo. Al comparar su modelo con el patrón (véase la Figura 26) el recuento de símbolos muestra que tiene 20 aciertos y un fallo, lo que le da puntuación 19.

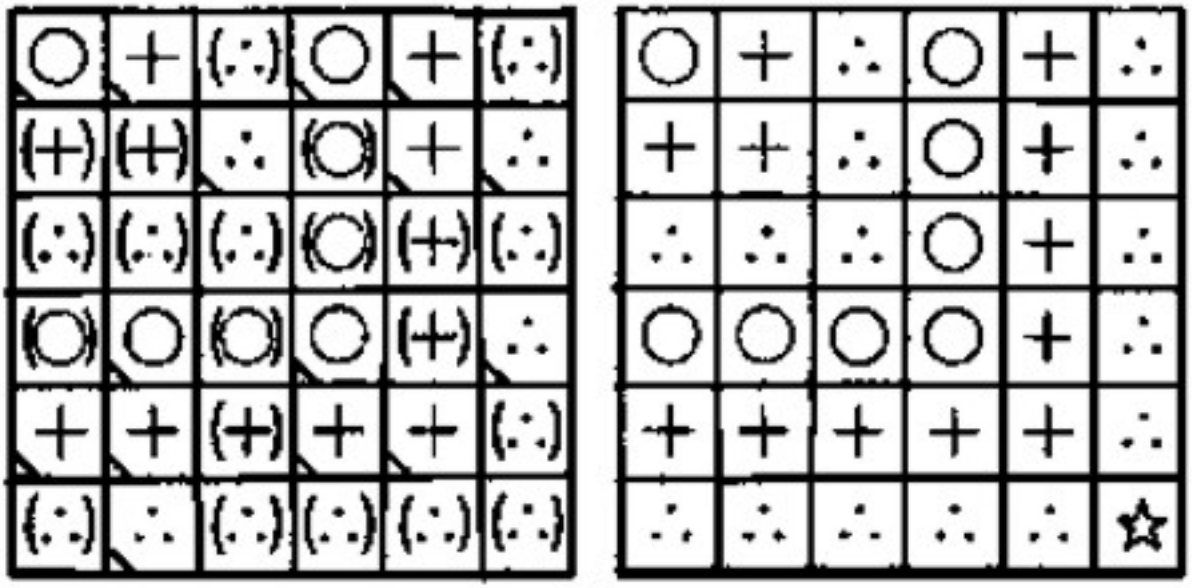


Figura 26. Modelo del jugador (izquierda) comparado con el patrón (derecha).

La estrella, el único fallo de Sackson, es totalmente inesperada, pero típica de las sorpresas que suele depararnos la Naturaleza. La ciencia es un juego complejo y el universo parece estar provisto de un orden misterioso, un orden que los humanos sólo podemos descubrir en parte y no sin gran esfuerzo. Cuanto más estudiamos la historia de este juego trascendental, tanto mayor es la angustiosa sensación de que el universo está buscando lograr máxima puntuación. Un ejemplo excelente y actual es el descubrimiento de la «organización octal», realizado independientemente por Murray Gell-Mann y Yuval Ne'eman. Se trata de una pauta de simetría, definida por una estructura de grupo continuo, a la que parecen acoplarse todas las partículas elementales. En cuanto se logró acumular información suficiente, la pauta resultó lo bastante sencilla como para que dos físicos, cada uno por su cuenta, lograsen detectarla; empero, siguió siendo lo suficientemente compleja como para que los demás jugadores no se percataran de ella.

Sackson, el inventor de «Pautas», es ingeniero en ejercicio, que ha trabajado sobre puentes y edificios de estructura metálica. A lo largo de su vida, su entretenimiento favorito ha sido coleccionar, estudiar e inventar juegos. Sin duda posee la mayor de las colecciones particulares de juegos de «especulación», de libros sobre juegos, y de notas logradas a costa de concienzuda investigación en grandes bibliotecas y

museos de todo el mundo. Él mismo ha inventado centenares de juegos. El primero, nos revela en su libro, lo ideó cuando estaba en primer curso de escuela primaria. Se basaba en encerrar palabras dentro de un círculo, y luego concatenarlas. El primero de los juegos de tablero que inventó fue «*Uncle Wiggily*», que todavía sigue a la venta. Inmediatamente lo modificó, alterando las reglas y cambiando los conejitos de la primera versión por soldaditos de juguete, transformándolo así en juego guerrero.

Casi todos los juegos comercializados por Sackson tienden a primar la habilidad intelectual sobre la pura suerte. Desde el punto de vista de ventas, el de más éxito ha sido el llamado «Acquire», cuyo tema es la inversión en cadenas hoteleras. Entre los otros juegos suyos disponibles en el mercado se cuentan «El caso del asesino escurridizo» (juego lógico basado en los diagramas de Venn), Focus, Bazaar, Tam-Bit, Take Five, Odd or Even, Tempo, Interplay, y dos juegos de naipes, Venture y Monad.

A *Gamut of Games* es un libro de juegos muy singular, pues prácticamente la totalidad de los 38 juegos que contiene les serán desconocidos a los lectores. En todos ellos, el material necesario es fácil de adquirir o construir: naipes, dados, dominós, tableros de ajedrez... De los 38, 22 son originales de Sackson, y los restantes, o bien son invención de otros aficionados amigos de Sackson, o bien son juegos antiguos, hoy olvidados, pero que merece la pena resucitar. Como es obvio, no habrá dos lectores que frente a un mismo juego muestren reacciones idénticas. A mi me resulta particularmente grato el llamado *Knight Chase*, que se desarrolla sobre un tablero de ajedrez, con un caballo blanco y otro negro, y 30 fichas menudas. Este juego ha sido inventado por Alexander Randolph, un checo de nacimiento que hoy reside en Venecia, y que tiene a la venta en los EE.UU. varios otros juegos excelentes. Otro juego al que no falta interés matemático, es «Plank», una variante del tatetí (tres en raya), que se vale de 12 tiras tricolores de cartulina. La sección final del libro es un valioso obsequio que Sackson hace al lector: se dan allí recensiones sucintas de más de 200 juegos para adultos, seleccionados entre los mejores que hay en venta en los EE.UU.

El texto de Sackson, nada engolado, está salpicado de anécdotas personales y de breves referencias históricas, tan curiosas como sorprendentes. Antes de leer el

libro, por ejemplo, yo ignoraba que el *cribbage* (juego de naipes inglés, para dos o tres personas) hubiera sido ideado por Sir John Suckling (poeta del siglo XVII), ni sabía tampoco que el *Monopoly*, sin duda el más difundido de los juegos de especulación y compra-venta, se derivase de *The Landlords Game*, patentado en 1904 por una tal Lizzie J. Magie, juego cuya finalidad era enseñar la teoría del impuesto simple de Henry George. En su libro, Sackson reproduce el tablero patentado por Magie; la semejanza con el Monopoly salta a la vista.

Los juegos de tablero comerciales, nos recuerda Sackson, tienden a reflejar los acontecimientos y los temas que interesan a las gentes de su tiempo. Aunque él no lo menciona, tenemos un irónico ejemplo de su afirmación en *The Money Game* («el juego del dinero»), juego de naipes inventado por Sir Norman Angell, premio Nóbel de la Paz en 1933. La baraja, especial, y el dinero en miniatura precisos para este juego de especulación bursátil venían empaquetados junto a un libro explicativo de 204 páginas. Publicado por E. P. Dutton, en la sobrecubierta hacían de él exagerados elogios Walter Lippmann, John Dewey y destacados economistas. ¿Cuál es la gracia, gracia macabra, del «juego del dinero» de Angell? Su fecha de publicación: 1929.

Apéndice

Robert Abbott ha modificado considerablemente su juego «Eleusis», logrando así que las partidas sean mucho más entretenidas. Las reglas de la «Nueva Eleusis» pueden verse en la sección Juegos Matemáticos de «Investigación y Ciencia» de diciembre de 1977.

Sidney Sackson se retiró en 1970 de sus tareas ingenieriles, dedicándose desde entonces enteramente a inventar nuevos juegos y escribir. Su *Gamut of Games* sigue en prensa, en edición encuadernada (Castle Books); hay en la actualidad cuatro libros suyos más, que ha preparado para Pantheon, una división de Random House.

Los cuatro, en rústica, son *Beyond Tic Tac Toe* (1975), *Beyond Solitaire* (1976), *Beyond Words* (1977) y *Beyond Competition* (1977). Todos ellos contienen hojas desprendibles donde jugar a estos novedosos pasatiempos. Sackson continúa haciendo la recensión de nuevos juegos en su sección habitual de *Strategy and*

Tactics, revista bimensual dedicada a juegos bélicos, y colabora en la revista inglesa *Games and Puzzles* y en la nueva publicación americana *Games*.

En los EE.UU. están a la venta más de dos docenas de juegos de tablero originales de Sackson, de los cuales, los más conocidos son los de marca *3M*: Acquire, Bazaar, Executive Decision, Venture, Monad, y Sleuth. Otro juego suyo, Focus, se comenta en mi libro *Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American*, capitulo 5.

Se están haciendo decididos esfuerzos para lograr programas de ordenador capaces de ejecutar automáticamente procesos de inducción y cada vez es mayor la bibliografía sobre el tema. Varios especialistas e investigadores en ciencias de computadores han experimentado diversos programas para el juego de «Pautas» creado por Sackson. Uno de tales programas es analizado con detalle en *A Game Playing Procedure for a Game of Induction*, trabajo de Edward Thomas Purcell, con él logró el grado de «master» en ciencias de computadores en la Universidad de California, en Los Ángeles.

Soluciones

El problema consistía en determinar el criterio de organización de cierto modelo para el juego de inducción de Sackson. He aquí la solución: partiendo del ángulo superior izquierdo, y moviéndose en espiral hacia el centro, en el sentido de las agujas del reloj, vemos primero un símbolo, luego dos símbolos, luego tres, después cuatro, y a continuación, los símbolos anteriores se repiten, en el mismo orden, en grupos de cinco, seis, siete y ocho.

++++++++++++++++

Capítulo 5

Los elegantes triángulos

Cabría suponer que el humilde triángulo fue ya tan exhaustivamente estudiado por los geómetras de la Grecia clásica, que mal podrían los siglos posteriores tener ocasión de aportar sobre ellos nuevos conocimientos de interés. Sin embargo, no es cierto. Evidentemente, el número de teoremas sobre triángulos es infinito, si bien, a partir de cierto punto, se complican tanto y se hacen tan estériles que nadie puede calificarlos de elegantes. George Polya definió en cierta ocasión la elegancia de los teoremas geométricos como «directamente proporcional al número de ideas que en ellos vemos, e inversamente proporcional al esfuerzo requerido para comprenderlas». Durante los últimos siglos se han descubierto muchos elegantes resultados sobre triángulos, tan bellos como importantes, pero con los que no es probable que se haya tropezado el lector durante su formación en geometría plana elemental. En este capítulo examinaremos solamente una porción mínima de estos teoremas, deteniéndonos un poco en aquellos que han suscitado problemas con matiz recreativo.

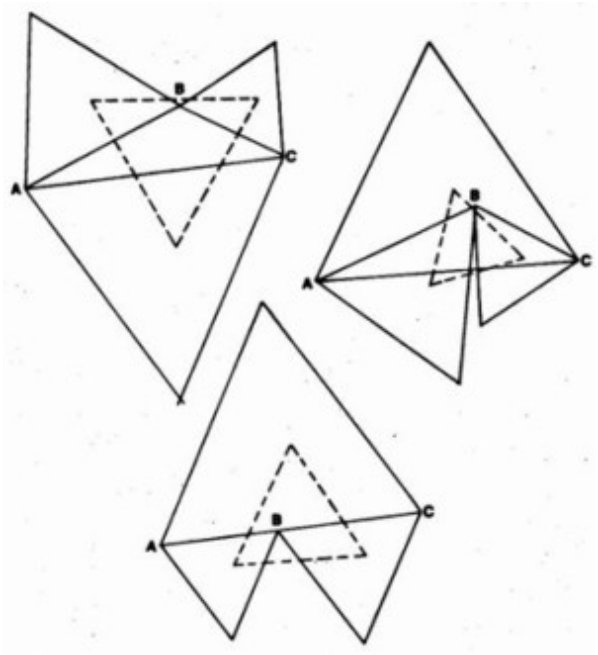


Figura 27. Al unir los centros de tres triángulos equiláteros se obtiene un cuarto (en líneas de trazos).

Comencemos por un triángulo ABC de forma arbitraria (véase la Figura 27). Sobre cada uno de sus lados se construye un triángulo equilátero, bien hacia el exterior (arriba, a la izquierda), bien hacia el interior (arriba, derecha). En ambos casos se descubre que al unir por líneas rectas (de trazos en la figura) los centros de los nuevos triángulos (estos centros pueden determinarse por intersección de dos alturas) queda construido un cuarto triángulo equilátero. (A veces, el teorema se enuncia construyendo sobre cada lado un triángulo isósceles, con ángulos de 30 grados en la base. El cuarto triángulo resulta de unir los vértices de los triángulos isósceles así construidos. Estos vértices son los centros de nuestros triángulos equiláteros, así que ambos teoremas son idénticos.) Si el triángulo ABC de partida fuese ya equilátero, los triángulos trazados hacia el interior definen un triángulo equilátero «degenerado», reducido a un punto. El teorema, que es precioso, sigue siendo válido cuando el triángulo inicial queda degenerado en un segmento rectilineo, como vemos en la parte inferior derecha de la ilustración. Ignoro quién fue el primero en descubrirlo, ha sido atribuido a Napoleón-, pero de él se han publicado en estos últimos años muchas demostraciones. Una muy poco común, basada exclusivamente en teoría de grupos y transformaciones de simetría, puede verse en *Geometric Transformations*, del matemático ruso Isaac Moisevitch Yaglom.

Otro teorema muy elegante es el famoso «de los nueve puntos», en el cual parece surgir de la nada una circunferencia, lo mismo que antes se materializaba insospechadamente un triángulo equilátero. Fue descubierto por dos matemáticos franceses, quienes lo publicaron en 1821. Dado un triángulo cualquiera, situemos en él tres ternas de puntos (véase la Figura 28).

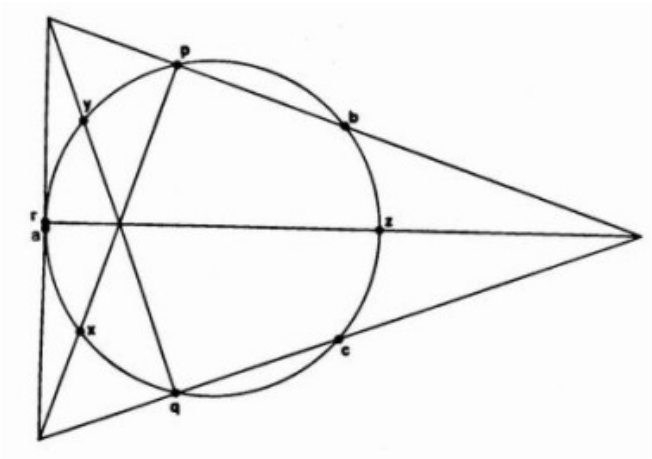


Figura 28. El teorema de los nueve puntos

1. Los puntos medios (a, b, c) de los tres lados.
2. Los pies (p, q, r) de las tres alturas.
3. Los puntos medios (x, y, z) de los segmentos rectilíneos que unen cada vértice con el ortocentro (punto de intersección de las tres alturas).

Como muestra la ilustración, estos nueve puntos yacen sobre una misma circunferencia, resultado sorprendente que abre paso a otra multitud de teoremas. Por ejemplo, no es difícil demostrar que el radio de la circunferencia trazada por estos nueve puntos es precisamente la mitad del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo de partida. La propiedad de las alturas de cortarse en un solo punto (ortocentro) es de por sí interesante; Euclides no la menciona, y aunque Arquímedes la da a entender, parece ser que no fue enunciada explícitamente hasta Procio, filósofo y geómetra del siglo V.

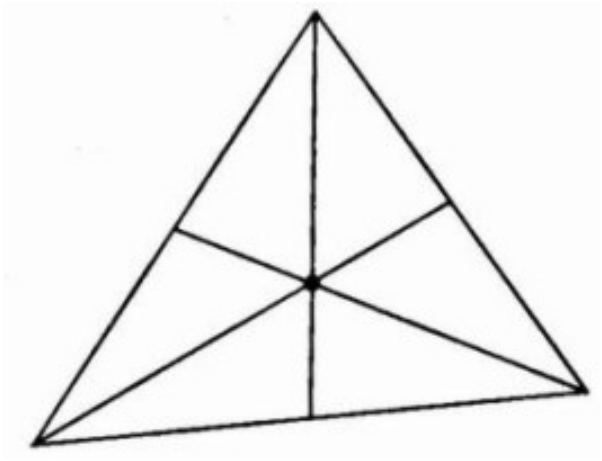


Figura 29. El baricentro triseca las medianas

En un triángulo, se llaman medianas a las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto (véase la Figura 29). También las medianas concurren en un punto, que se denomina baricentro (y también centroide, centro de gravedad, y centro de masas). El baricentro dista de cada lado un tercio de la longitud de la correspondiente mediana; las medianas dividen al triángulo en seis porciones triangulares de iguales áreas. Además, el baricentro o centroide es el centro de gravedad del triángulo, hecho que ya conocía Arquímedes. Es posible que el lector haya visto demostrada esta propiedad recortando en cartulina un triángulo escaleno, trazando las medianas para hallar su baricentro y sosteniéndolo en equilibrio sobre la punta del lápiz en ese punto.

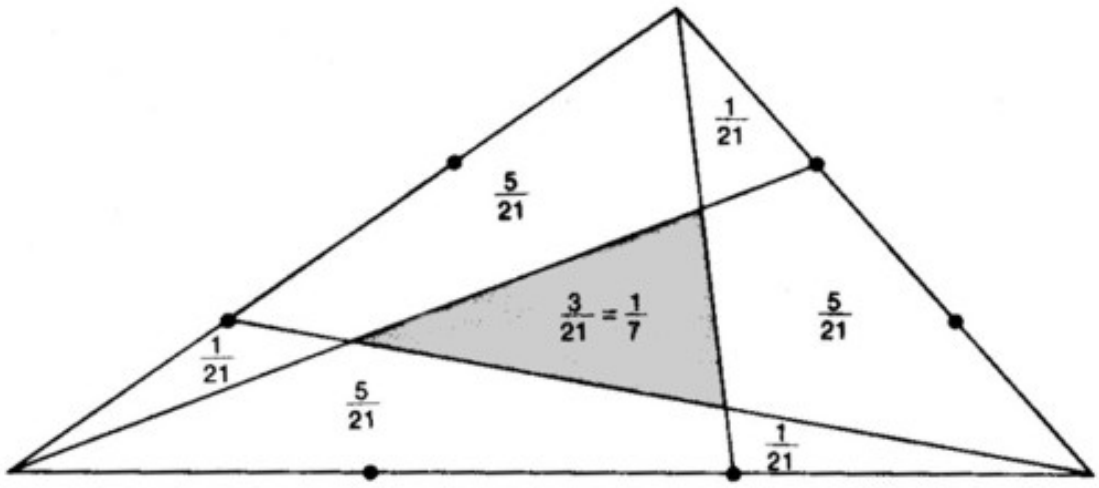


Figura 30. Cevianas trisecantes

Las medianas son casos particulares de rectas más generales, llamadas «cevianas» (en honor de un matemático italiano del siglo XVII, Giovanni Ceva). Las cevianas son rectas trazadas desde un vértice del triángulo a un punto del lado opuesto. Si en lugar de los puntos medios tomásemos en los lados los puntos de trisección, las tres cevianas que vemos en la Figura 30 dividirían al triángulo en siete regiones cuyas superficies serían todas múltiplos enteros de 1/21 del área del triángulo de partida. El triángulo central, sombreado, tiene área 3/21, o sea, 1/7. Existen muchas ingeniosas demostraciones de esta propiedad, así como de los resultados de un caso más general, donde cada lado del triángulo es dividido en n partes iguales. Si las cevianas se trazan como antes, hasta el primero de los puntos de división de cada lado, recorriendo el triángulo en sentido horario (o antihorario, si se prefiere), el triángulo central tendrá un área de $(n - 2)^2 / (n^2 - n + 1)$. En su *Introduction to Geometry* (de la que existe versión castellana, del mismo titulo) H. S. M. Coxeter estudia una generalización aún más amplia, donde cada lado del triángulo puede ser descompuesto en números arbitrarios de partes iguales. Allí se da una fórmula que se remonta a 1896, y Coxeter muestra cuán sencillamente puede ser deducida sin más que alojar el triángulo en una reticulación regular de puntos del plano.

Todo triángulo tiene tres lados y tres ángulos. Euclides estudió tres casos de congruencia de triángulos en los que ésta queda asegurada por la igualdad de ciertas ternas de elementos, por ejemplo, dos lados y el ángulo comprendido entre ambos. Pero, ¿es posible que dos triángulos tengan idénticos cinco de sus seis elementos, sin ser, pese a ello, congruentes? Puede parecer imposible a primera vista, mas resulta que hay una infinidad de pares de estos triángulos «congruentes a 5», como han sido bautizados por Richard A. Pawley. Si en un par de triángulos congruentes a 5 fuesen iguales los tres lados, los triángulos serían totalmente congruentes; por lo tanto, la única situación en que puede darse la no - congruencia es la igualdad de los tres ángulos y de dos lados. Cuando se exige, además, que los lados de los triángulos vengan todos dados por números enteros, el ejemplo mínimo será el que vemos en la Figura 31.

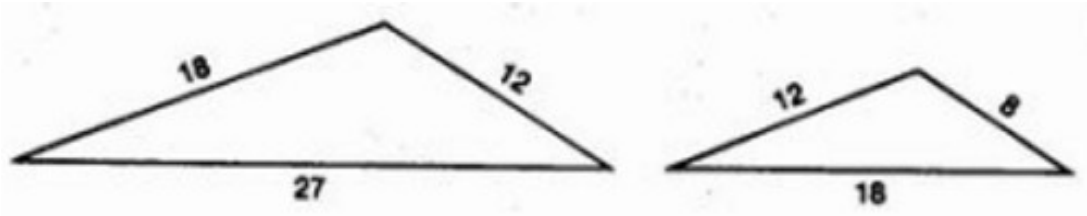


Figura 31. El par de triángulos mínimos "congruentes a 5".

Observemos que los lados de 12 y 18 unidades, aunque de longitud igual, no son lados homólogos. Los triángulos son forzosamente semejantes, porque los ángulos homólogos sí son respectivamente iguales; pero no son congruentes. El problema de hallar todos los pares de triángulos como éstos guarda íntima relación con el problema de la razón áurea.

Existen muchas fórmulas, conocidas desde antiguo, para hallar los lados, ángulos, el área, etc., de un triángulo, conocidos ciertos datos sobre sus alturas, medianas, etc. La expresión

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde *a, b* y *c* son las longitudes de los lados del triángulo y *s* es el semi - perímetro, es decir, la mitad de la suma de longitudes de los lados, da el área del triángulo. Esta fórmula, tan sorprendente como sencilla, fue demostrada por vez primera en la Métrica de Herón de Alejandría, quien vivió en los siglos I o II después de Cristo. La fórmula, que constituye el principal mérito matemático de Herón, es fácil de demostrar con ayuda de trigonometría. En nuestros días, el renombre de Herón se debe, sobre todo, a sus deliciosos tratados sobre autómatas griegos y juguetes hidráulicos, como la paradójica «fuente de Herón» donde un chorro de agua parece desafiar la ley de la gravedad, pues brota más alta que su venero.

Hay un problema clásico, de origen desconocido, para cuya solución es necesario valerse de la semejanza de triángulos y que se ha hecho muy famoso; como mi corresponsal Dudley F. Church ha expresado con tino, «su atractivo reside en que, a primera vista, parece prometer solución sencilla, para enseguida convertirse en una pesadilla algebraica». El problema habla de dos escaleras de peldaños, de distinta

longitud, que se cruzan como muestra la Figura 32. (Si las escaleras fuesen de igual longitud, el problema seria trivial.)

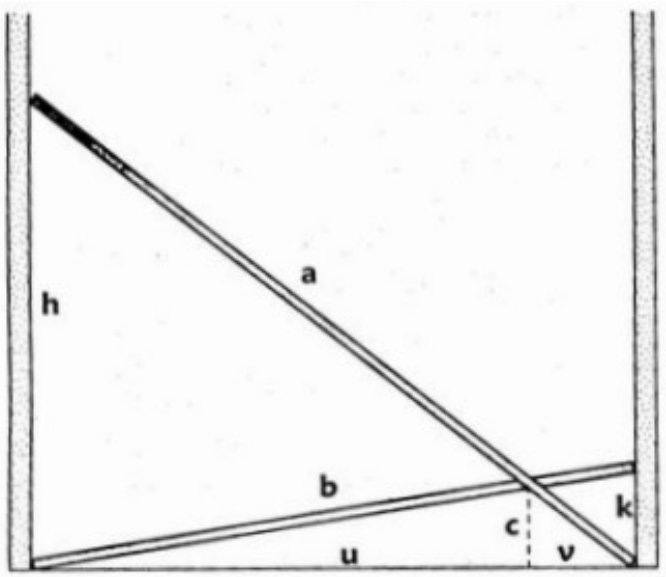


Figura 32. El problema de las escaleras cruzadas

Las dos escaleras se apoyan contra las paredes de sendos edificios. Dadas las longitudes de las escaleras y la altura de su punto de cruce, ¿qué distancia separa los edificios? Los tres valores dados difieren ampliamente de unas versiones a otras. Tomaremos aquí un ejemplo típico, extraído de *One Hundred Mathematical Curiosities*, de William R. Ransom. Las escaleras, de longitud 100 unidades (*a*) y 80 (*b*) se cruzan a 10 unidades (*c*) sobre el suelo. Planteando relaciones de semejanza, Ransom consigue la ecuación

$$k^4 - 2ck^3 + k^2(a^2 - b^2) - 2ck(a^2 - b^2) + c^2(a^2 - b^2) = 0$$

que en este caso particular da

$$k^4 - 20k^3 + 3.600k^2 - 72.000k + 360.000 = 0$$

Esta ecuación de ominoso aspecto es una cuártica, y para resolverla, lo mejor es emplear algún procedimiento de aproximaciones sucesivas, por ejemplo el método de Horner. Resulta así que *k* vale aproximadamente 11,954, de donde ya cuesta

poco deducir la separación entre muros ($u + v$), que es 79,10 +. Hay otras muchas formas de enfocar el problema, que conducen a ecuaciones semejantes.

Se plantea ahora una cuestión difícil. ¿Habrá versiones del problema (suponiendo siempre escaleras de distinta longitud) donde todos los segmentos nombrados en la Figura 32 tengan longitudes enteras? Que yo tenga noticia, el primero en resolver esta cuestión fue Alfred A. Bennett, en 1941. Desde entonces, sus soluciones han sido redescubiertas muchas otras veces. La solución más sencilla (pues hace mínimas tanto la altura del cruce como la separación entre muros) corresponde a escaleras de longitudes 119 y 70 unidades, con altura en el cruce de 30 unidades y anchura de 56. Además, el conjunto de soluciones enteras es infinito. Hay también infinitas soluciones donde no sólo son enteras las cantidades ya mencionadas, sino asimismo la distancia que separa los extremos más altos de las escaleras. (Véase la solución de Gerald J. Janusz.)

Si tan sólo se requiere que sean enteras las longitudes de las escaleras, la distancia entre edificios y la altura del cruce, tendremos libertad para buscar soluciones que hagan mínimos otros valores. H. G. ApSimon me ha enviado el análisis más completo que conozco. La solución que hace mínima la separación entre paredes es 40 para esta incógnita, 38 para la altura del cruce, y 58 y 401 para las escaleras. La altura de cruce alcanza el mínimo de 14 cuando la anchura entre edificios es 112, y las escaleras miden 113 y 238. (Estas dos soluciones habían sido ya descubiertas con anterioridad por John W. Harris.) La solución que logra hacer mínima la longitud de la mayor de las escaleras es 63 para el vano entre edificios, 38 para la altura del cruce, y 87 y 105 para las escaleras. La solución que hace mínima la longitud de la escalera pequeña es 40 para la separación entre edificios, 38 para la altura de cruce, y 58 y 401 para las escaleras.

ApSimon buscó también una solución que hiciera mínima la diferencia de longitudes de las escaleras. La mejor de las soluciones que consiguió fue de 1540 para el vano entre muros, 272 para la altura de cruce, y escaleras de longitudes 1639 y 1628, con diferencia de 11 unidades.

Empero, no consiguió demostrar que su solución fuese mínima.

Si tan sólo se nos dan las distancias desde un punto a los tres vértices de un triángulo, es evidente que habrá infinitos triángulos que satisfagan estas

condiciones de distancia. Empero, si se exige que el triángulo sea equilátero, estas tres distancias pueden determinar unívocamente el lado del triángulo. El punto dado puede encontrarse en el interior del triángulo, en el exterior, o sobre uno de sus lados. Los lectores me envían a menudo un antiguo problema de este tipo, que por lo común presenta la siguiente forma: Un punto situado en el interior de un triángulo equilátero dista de los vértices 3, 4 y 5 unidades. ¿Cuánto mide el lado del triángulo?

Soluciones

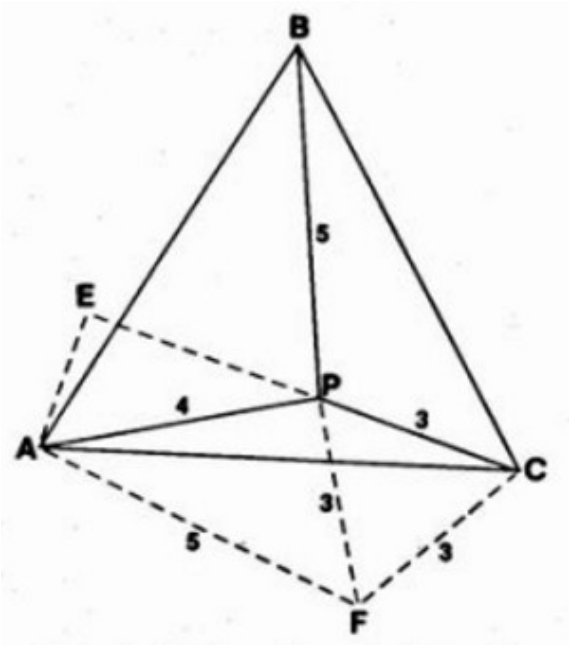


Figura 33. Solución al problema de las tres distancias

El problema pedía hallar el lado de un triángulo equilátero, sabiendo que contiene un punto que dista de sus vértices 3, 4 y 5 unidades. La solución aquí presentada se debe a Charles W. Trigg, en *Mathematical Quickies*. Las líneas de trazos de la Figura 33 están construidas de forma que *PCF* sea un triángulo equilátero, y *AE* sea perpendicular a la prolongación de *PC* hacia la izquierda. El ángulo *PCB* = 60 grados, menos el ángulo *PCA* = ángulo *ACF*. Los triángulos *PCB* y *FCA* son por este motivo congruentes *AF* = 5. En vista de que *APF* es rectángulo, el ángulo *APE* = 180 - 60 - 90 = 30 grados. De aquí deducimos que *AE* mide 2, y que *EP* es la raíz cuadrada de 3. Podemos ahora plantear la igualdad

$$AC = \sqrt{2^2 + (3 + 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$$

de donde obtenemos que el lado del triángulo, *AC* tiene el valor de 6,766 +.
Hay una fórmula, de preciosa simetría, que permite calcular el lado de un triángulo equilátero, conocidas las distancias desde un punto a sus vértices:

$$3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Tomando cualesquiera tres de estas incógnitas como distancias a los vértices, basta despejar la cuarta para tener el lado del triángulo. Entre las soluciones con valores enteros, la más sencilla es 3, 5, 7, 8. El punto estará situado en el exterior del triángulo salvo en el caso de lado 8; en tal caso yacerá sobre un lado. Varios lectores me han enviado demostraciones de que en los tres casos (punto en el interior, sobre un lado, o exterior) hay infinitas soluciones primitivas (es decir, soluciones sin divisores comunes), con valores enteros. Cuando el punto es interior, la más sencilla es 57, 65 y 73 para las distancias, y 112 para el lado del triángulo. La siguiente, 73, 88, 95 y 147.

Capítulo 6
Paseos aleatorios y juegos de apuestas

... y con esto se quietó y prosiguió su camino, sin llevar otro que aquel que su caballo quería, creyendo que en aquello consistía la fuerza de las aventuras.
Don Quijote, Primera parte, Cap. II

Es muy posible que el trotamundos empedernido, que va compulsivamente errando de una ciudad a otra, padezca alguna forma de neurosis. Empero, hasta el más cuerdo precisa, si bien en dosis moderadas, de alguna clase de conducta imprevisible. Una de ellas consiste en vagar sin rumbo, a la buena ventura. Seguramente la fama de las grandes novelas picarescas y del Quijote se deba, al menos en parte, al placer que por persona interpuesta experimenta el lector con los inesperados lances que provoca tan azarosa senda.

En su ensayo «Nueva refutación del tiempo», Jorge Luis Borges nos describe una caminata a la fortuna por las calles de Barracas: «Procuré una máxima latitud de probabilidades para no cansar la expectativa con la obligatoria antevisión de una sola de ellas». La segunda luna de miel de G. K. Chesterton, tal y como nos la describe en su autobiografía, fue un azaroso «viaje por el vacío». Su esposa y él tomaron el primer autobús que pasó, se bajaron al pasar por una estación de ferrocarril, tomaron el primer tren que pasó y al término del trayecto echaron a andar por trochas y senderos hasta llegar finalmente a una posada, donde se quedaron.

Los matemáticos tienen la pertinaz costumbre de analizar todo lo analizable, y las caminatas sin rumbo no iban a ser excepción. Matemáticamente hablando, son tan ricas en aventuras como las andanzas del Ingenioso Hidalgo. En efecto, los paseos aleatorios son una de las principales ramas de la teoría de cadenas de Markov, que a su vez son uno de los más candentes temas de la moderna teoría de probabilidades, en razón de su creciente aplicación científica.

Una cadena de Markov (así llamada en honor del matemático ruso A. A. Markov, el primero en estudiarlas) es un sistema de «estados» discretos más un sistema de probabilidades de transición de unos estados a otros, probabilidades que han de ser independientes de la Historia», es decir, de la evolución del sistema en el pasado. Entre los ejemplos más sencillos de tales cadenas tenemos la caminata aleatoria a lo largo del segmento rectilíneo que vemos en la Figura 34.

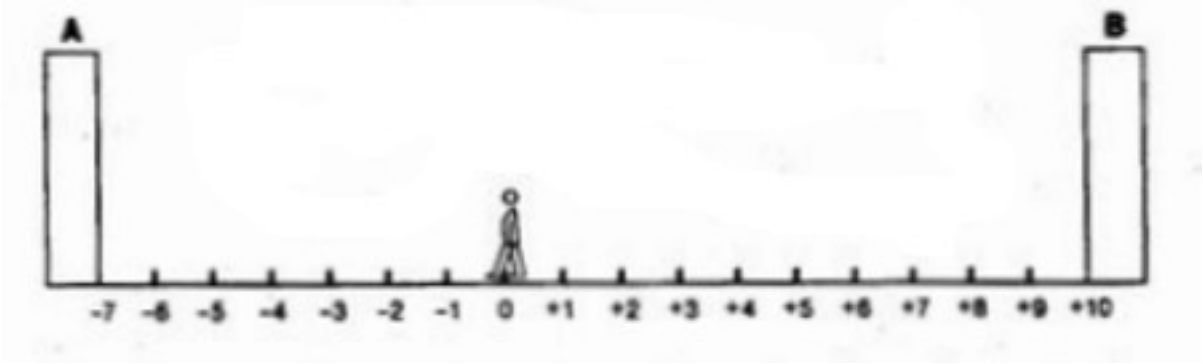


Figura 34. Paseo aleatorio unidimensional con barreras absorbentes

Cada graduación del segmento corresponde a un paso de longitud unidad. Una persona comienza su paseo en el punto señalado 0. En cada ocasión, antes de decidir en que sentido dará el paso siguiente, el hombre lanza una moneda: si sale cara dará un paso a la derecha; si cruz, un paso a la izquierda. Dicho con terminología matemática, su «probabilidad de transición» de cada graduación a una adyacente es de 1/2. Tal caminata se llama simétrica, por ser iguales las probabilidades de ir a la derecha y a la izquierda. Las barras verticales A y B, situadas en 7 y en + 10 son «barreras absorbentes»; esto significa que si el andarín se tropieza con un cualquiera de ellas es «absorbido», y la caminata termina allí.

Entre las características más originales de este paseo se cuenta la de ser isomorfo a un antiguo problema llamado «ruina del jugador». El jugador A comienza con un capital de $7, y el jugador B, con $10. Van apostando sistemáticamente a «cara o cruz». Cuando sale cara, B le paga un dólar a A; por cada cruz, A le da un dólar a B. El juego termina tan pronto como uno de los jugadores queda «arruinado», es decir, se queda sin dinero. Es fácil comprender la correspondencia entre el desarrollo de este juego y las andanzas del caminante. En cada instante, el capital de A,

expresado en dólares, está representado por la distancia del paseante a la barrera A, mientras que el capital de B está dado por la distancia del errático sujeto a la barrera B. Si los dos primeros lanzamientos han dado caras, el paseante avanza dos pasos hacia la derecha; interpretado en el lenguaje de apuestas, estamos diciendo que A ha aumentado su capital de $7 a 9, mientras que B ha perdido, de $10 a 8. Si el paseante llega a la barrera A, quiere decir que A se ha arruinado. Y si el andarín se tropieza con la barrera B, es B quien ha sufrido la ruina.

Ambas interpretaciones dan iguales respuestas a todas las cuestiones probabilísticas referentes a ellas. Algunas resultan fáciles de dar, otras son de extrema dificultad. He aquí una de las más fáciles: ¿cuál es la probabilidad de ganar para cada jugador? O lo que es equivalente, ¿cuál es la probabilidad de que el paseo termine en una u otra barrera? Cuesta poco demostrar que la probabilidad de victoria de cada jugador está dada por su capital inicial dividido por el total de dólares que poseen entre ambos. Así, la probabilidad de que A llegue a arruinar a B es de 7/17; la probabilidad de que B le gane la partida a A es 10/17. Enfocado como paseo aleatorio, la probabilidad de que la caminata finalice en la barrera B es 7/17, y la de que termine en A es 10/17. (Puede verse una demostración sencilla de estos hechos, basada en una goma elástica estirada, en «Brownian Motion and Potential Theory», por Reuben Hersh, y Richard J. Griego, en *Scientific American*, marzo de 1969).

La suma de ambas probabilidades tiene que ser 1 (probabilidad de la certeza, o del «suceso seguro»). La interpretación intuitiva de este hecho es que si la partida, o el paseo, durase lo suficiente, es seguro que tendrá fin. ¿Qué sucedería si se suprimiera una de las barreras, la B por ejemplo, dejando así que la recta se prolongue hacia la derecha hasta el infinito? Entonces, si el proceso tiene duración suficiente, es seguro que terminará en la barrera A. Interpretado como juego de azar estamos diciendo que si A se enfrenta a un contrincante con capital infinito, es seguro que A terminará arruinado. Malas noticias, pues, para los jugadores empedernidos. Aún cuando todas sus apuestas fuesen equitativas, como están enfrentándose a un «oponente» (todos los demás jugadores del mundo) cuyo capital es virtualmente ilimitado, tienen garantizada la ruina.

Si bien el cálculo es de otro tipo, también es fácil hallar la probabilidad de que el caminante, partiendo de un determinado punto, alcance otro punto dado (o retorne al punto de partida) después de dar un número prefijado de pasos. Por consideraciones de paridad, es fácil ver que en la mitad de casos esa probabilidad es 0 (suceso imposible). Por ejemplo, el paseante no puede ir desde 0 hasta un punto de abscisa par en un número impar de pasos, ni alcanzar puntos a distancia impar en número par de etapas. ¿Qué probabilidad tiene de pasar de 0 a + 1 en tres pasos exactamente? Tal probabilidad es idéntica a la de que en tres lanzamientos de la moneda salgan, sin que importe el orden, dos caras y una cruz. Puesto que así sucede en tres ocasiones de los ocho resultados equiprobables posibles de tres lanzamientos, la solución es 3/8. (Podemos complicar la situación sustituyendo una o ambas barreras absorbentes por «barreras reflectantes» situadas en el punto medio entre dos divisiones consecutivas. Cuando el paseante choca con una tal barrera, rebota hasta la marca que acababa de abandonar. En la partida de «cara o cruz» equivaldría a que cada vez que un jugador se arruinase se le entregara un dólar para que pudiera continuar jugando. Si ambas barreras fuesen reflectantes el juego no concluiría jamás.)

También sencillo, pero más difícil que los anteriores, es el cálculo del número esperado de lanzamientos antes de que en el segmento limitado por barreras absorbentes el paseante quede absorbido por alguna. El «número esperado» significa el promedio de pasos que tardaría en concluir el paseo, de repetirse indefinidamente este experimento. Tal número resulta ser el producto de las distancias de las barreras al punto de partida, en nuestro caso, 7 x 10 = 70. Un paseo «típico» duraría, pues, 70 pasos; la partida de cara o cruz que pudiéramos llamar «normal» acabaría con la ruina de uno de los jugadores al cabo de unos 70 lanzamientos. Esta cifra es considerablemente mayor de lo que esperaría uno, e implica que en un juego «limpio» entre dos jugadores, cada cual con $100 de capital inicial, y que van cada uno arriesgando $1 en cada lance, la partida completa duraría alrededor de 10.000 envites. Todavía más contrario a la intuición: si uno de los jugadores empieza con sólo $1, y el otro con 500, la partida promedio constaría de 500 apuestas. En el paseo aleatorio, si el andarín parte a la distancia de un paso

de una barrera, y de 500 pasos de la otra, ¡podría recorrer, por término medio, 500 pasos antes de ser absorbido!

¿Cuál es el número esperado de pasos hasta que el caminante se sitúa por *primera* vez a distancia *n* del punto de partida, 0, suponiendo que (de haberlas) ninguna de las barreras diste del origen menos de *n*? Se comprueba fácilmente que este problema es caso particular del anterior. Equivale a preguntarse por el número esperado de pasos hasta que el caminante sea absorbido, sabiendo que cada barrera está a distancia *n* de 0. Será, sencillamente, $n \times n = n^2$. Por tanto, si el caminante da *n* pasos, podemos esperar que la distancia máxima que alcance (en algún momento de su caminata) sea de $\sqrt{n}$.

Que no es lo mismo que preguntarse cuál es la distancia esperada al origen en la posición final, tras *n* pasos. La fórmula es ahora bastante más difícil de deducir. Por ejemplo, para un solo paso tal distancia es, evidentemente, 1. Para dos pasos, sigue siendo 1, pues las cuatro posiciones 0, 0, 2 y 2, que puede ocupar el caminante son equiprobables. Con tres pasos la distancia esperada es 1,5. Cuando *n* tiende hacia infinito, la distancia esperada se va aproximando asintóticamente a $\sqrt{(2n/\pi)}$, es decir, alrededor de 0,8 $\sqrt{n}$ unidades, a cualquiera de los dos lados de 0, para valores grandes de *n*. (Puede verse al respecto el *libro Probability and Statistics*, por Frederick Mosteller y coautores, p. 14.)

De todas las propiedades del paseo aleatorio, quizá la más difícil de creer sea la siguiente. Tornamos una recta graduada, sin barreras, y nos preguntarnos con qué frecuencia irá el caminante pasando de uno a otro lado del origen. A causa de la simetría del paseo esperaríamos, sin duda, que en una larga caminata el andarín se encontrara aproximadamente la mitad del tiempo en cada una de las semirrectas que parte del origen. Ocurre exactamente lo contrario. Independientemente de la duración del paseo, el número más probable de cambios de lado es 0, el número siguiente en probabilidad es 1, y a continuación, 2, 3, etc.

William Feller, en un famoso capítulo sobre «Fluctuaciones en lanzamientos de monedas y caminatas al azar» (de su clásica *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, hay traducción al español de la tercera edición, *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, Limusa, S. A., Méjico, 1975) tiene lo siguiente que decir: «Si un educador o un psicólogo contemporáneo tuviese que

describir las conductas a largo plazo de las monedas, observando durante mucho tiempo el desarrollo de una partida de "cara o cruz", sacaría la conclusión de que la mayoría de las monedas están cargadas. Lanzando muchas monedas, a razón de *n* veces cada una, la proporción de ellas que da la ventaja a uno de los jugadores la práctica totalidad del tiempo es sorprendentemente grande. Tan sólo en unos pocos casos irá la ventaja cambiando de manos y fluctuando de la forma que parecería obligada en una moneda bien compensada.» Lanzando tan sólo 20 veces, la probabilidad de que cada jugador lleve la ventaja 10 veces es únicamente 0,06 +, resultado de aspecto poco verosímil. La probabilidad de que el perdedor definitivo nunca lleve la delantera, es en cambio, 0,35 +.

Suponiendo que la moneda sea lanzada una vez por segundo, durante todos los segundos de un año, Feller calcula que en una de cada 20 repeticiones del experimento, el jugador que termina ganando la partida llevará la ventaja durante más de 364 días y 10 horas. «Muy pocas personas podrían creer», escribe Feller, «que una moneda perfecta pueda producir secuencias tan absurdas, sin alternancias en el control del juego, a pesar de los millones de ensayos sucesivos. Y no obstante, esto es lo que sí haría una moneda bien equilibrada, con bastante regularidad».

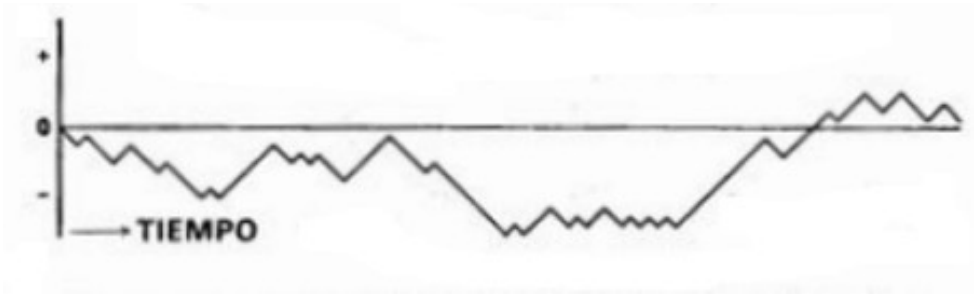


Figura 35. Paseo aleatorio simétrico basado en los primeros 101 dígitos del número π

La Figura 35 nos muestra la gráfica de un paseo aleatorio típico a lo largo del eje vertical, sin barreras. El transcurrir del tiempo está representado por el avance hacia la derecha. En lugar de lanzar una moneda o utilizar una tabla de dígitos aleatorios, nuestro paseo se basa en las 100 primeras cifras decimales deπ. (Dado que las cifras de π han superado todas las pruebas encaminadas a establecer su

carácter aleatorio, nos proporcionan una fuente muy adecuada de cifras tomadas al azar). Cada cifra par se traduce en un paso hacia arriba; cada dígito impar, en el descenso de un paso. Tras 101 pasos, el andarín tan sólo se ha encontrado 17 veces por encima del eje horizontal, alrededor del 17 por 100 del total. Tan sólo una vez ha visitado el punto de partida. El gráfico es también característico en que muestra cómo los retornos a 0, o a puntos próximos a 0 se producen a oleadas que tienden a aumentar progresivamente de longitud, con tasa de crecimiento aproximadamente igual a la raíz cuadrada del tiempo. En la ya citada obra de Feller pueden verse gráficos parecidos, basados en el lanzamiento simulado de una moneda durante 10.000 veces consecutivas.

Podemos ahora complicar las cosas haciendo que las probabilidades de transición difieran de 1/2 y admitiendo que los pasos de la caminata puedan tener longitud mayor que 1. Fijémonos en la curiosa y paradójica situación siguiente, que me fue explicada por Enn Norak, un matemático canadiense, si bien con terminología de apuestas. Un paseante parte de un punto situado a 100 pasos a la derecha de 0, en un eje sin barreras (véase la Figura 36).

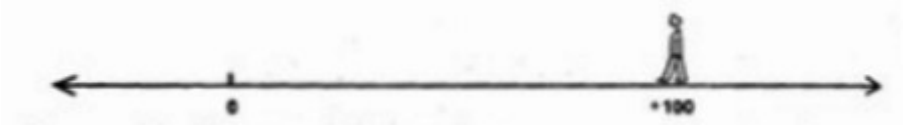


Figura 36. Una paradoja basada en un paseo aleatorio a lo largo de una recta sin barreras

Como dispositivo de azar no se utiliza una moneda, sino un mazo de 10 naipes, cinco negros y cinco rojos-. Una vez barajados, los naipes se colocan boca abajo, en fila sobre la mesa, y se elige uno al azar. Tras observar su color, la carta se desecha. De ser roja, el paseante avanza hacia la derecha; si negra, se desplazará hacia la izquierda. De esta forma se prosigue hasta que se hayan examinado las diez cartas. (Las probabilidades de transición cambian en cada paso. Tan sólo será de 1/2 cuando las proporciones de cartas rojas y negras sean iguales, antes de la extracción). La caminata difiere también de las ya comentadas en que antes de examinar cada carta el andarín ha de decidir cuál será la longitud de su próximo paso (que no tiene por qué ser un número entero.)

Supongamos que el paseante adopte la siguiente estrategia para decidir la longitud de sus pasos: tras observar la carta, dará un paso (hacia la derecha o la izquierda, según proceda) de longitud exactamente igual a la mitad de su distancia a 0. Su primer paso medirá pues 100/2 = 50 unidades. Si la carta observada fuese roja, llegaría hasta la división 150, y su paso siguiente tendría 150/2 = 75 unidades. Mas si la primera carta fuese negra, se desplazaría hacia la izquierda hasta la graduación número 50, y su siguiente paso tendría entonces 50/2 = 25 unidades. De esta forma se proseguiría hasta destapar la última carta. ¿Se encontrará entonces a la izquierda o a la derecha de la marca número 100, de donde partió inicialmente?

Es completamente seguro que se encontrará a la izquierda, resulta ser la solución. Quizá no parezca demasiado sorprendente, pero sin duda sí lo es que, independientemente del orden de extracción de los naipes, la caminata terminará siempre ¡en el mismo punto, a unas 76 unidades del punto inicial! La distancia exacta viene dada por la fórmula

$$a-\left[a(1-\frac{1}{k^2})^n\right]$$

donde *a* es la abscisa del punto de partida, y *n* el número de cartas rojas (o negras) que contiene el mazo. Cuando *a* sea 100 y *n* sea 5, como en nuestro ejemplo, la fórmula da el valor 76,26953125 para la distancia que el andarín se ha desplazado hacia la izquierda cuando el paseo termina.

Traduzcamos todo esto al juego de apuestas de Norak. Un jugador empieza la partida con $100. Su ganancia o pérdida queda decidida por un mazo bien barajado de cinco cartas rojas y otras tantas negras, del cual se van extrayendo y observando los naipes, sin reposición. (Daría lo mismo lanzar 10 veces una moneda, con tal de que al cabo haya mostrado igual número de caras y cruces. Al usar naipes queda garantizada tal igualdad.) Nuestro jugador gana cuando sale carta roja, y pierde cuando sale negra. En cada envite apuesta la mitad de su capital. Quizá cueste creerlo, pero al final de la partida habrá perdido exactamente $ 76,26953125. Las pérdidas aumentan al crecer *n*. Si *n* fuera 26, corno sucedería

tomando la baraja completa de 52 naipes, las pérdidas serían de más de $ 99,90. De todas maneras, nunca serían mayores que $ 100.

En lugar de apostar en cada envite la mitad de su capital, podría apostar una proporción fija cualquiera. Sea ésta 1/*k*, donde *k* es un número real positivo arbitrario. Cuando menor sea esta fracción, tanto menos se habrá perdido al final de la partida; cuanto mayor, tanto más. Si *k* fuese 1, es seguro que se perderá todo. En el caso general, la suma perdida es

$$a-\left[a(1-\frac{1}{k^2})^n\right]$$

Aún podemos generalizar más mezclando cartas rojas y negras en distintas proporciones, Pero la teoría general es demasiado compleja para presentarla aquí.

Fijémonos ahora en un divertido problema propuesto por Norak, que se funda en una variante del juego recién descrito. Podríamos enunciarlo como paseo aleatorio, pero me limitaré a presentarlo en su versión equivalente, como juego de apuestas. El juego se desarrolla igual que antes, salvo que ahora es el contrario de nuestro jugador quien decide la puesta de cada envite. Llamémosle Sánchez y supongámosle lo bastante rico corno para afrontar cualquier pérdida. Nuestro jugador sigue comenzando con $100. Se usa una baraja completa de 52 cartas. Antes de extraer y observar cada naipe, Sánchez apuesta siempre exactamente la mitad del capital que posee el otro jugador, es decir, el jugador de los $100. ¿Habrá Sánchez ganado o perdido dinero, una vez extraída la última carta? Sea de una u otra forma, ¿será siempre igual la pérdida o ganancia, y de ser así, qué fórmula la expresa? Si el lector ha seguido correctamente el razonamiento que antecede, podrá contestar estas preguntas casi sin pensar.

En un próximo capítulo concluiremos el tema, tan asombroso como desconcertante, de los paseos aleatorios, examinando algunas caminatas en el plano y en el espacio, y en reticulados como dameros y aristas de los sólidos regulares.

Soluciones

El problema de las apuestas era, más que nada, una broma. Si el jugador A comienza con cierto capital, y si en cada extracción de un naipe de un mazo con igual número de cartas rojas y negras se le permite a B, oponente de A, apostar la mitad del capital de que en cada momento dispone A, el juego es evidentemente el mismo que el ya explicado, donde A apuesta siempre la mitad de su propio capital. El jugador B, quien decide ahora las apuestas, ganará exactamente lo que pierda A, y éste pierde lo mismo que en la partida ya explicada arriba. Por consiguiente, sigue siendo válida la fórmula allí dada. Se nos dice que el perdedor comienza con $ 100, y que el instrumento de azar es un mazo de 52 naipes. El ganador se llevará exactamente 100 - [100(3/4)26] dólares, y no le deja al perdedor ni una perra gorda.

Capítulo 7
Paseos aleatorios por el plano y el espacio

Ya hemos examinado en el capítulo anterior las caminatas aleatorias compuestas de pasos discretos a lo largo de una recta, con o sin barreras absorbentes, e hicimos notar su curiosa equivalencia con varios juegos de apuestas bi-personales. En este capítulo, el paseo aleatorio nos llevará por el plano y el espacio.

En un tipo de paseo aleatorio que ha sido muy estudiado, a cada paso el andarín va de un vértice de un retículo cuadriculado infinito a otro vértice contiguo, como vemos en la Figura 37.

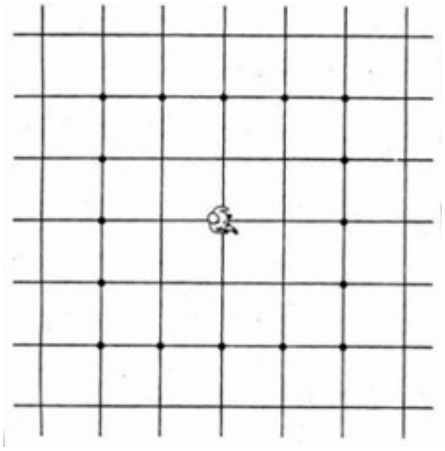


Figura 37. Paseo aleatorio sobre una red cuadrada

Cada paso tiene longitud unidad, y el paseo es «simétrico» en el sentido de que puede tornarse cada una de las cuatro direcciones con la misma probabilidad, es decir, con probabilidad 1/4. Podemos hacer que la caminata sea finita rodeando al paseante de barreras absorbentes, que en la figura han sido representadas por puntos negros gruesos. Cuando el paseante pisa una de estas «trampas» queda «absorbido» y su paseo concluye. (No es menester que el cercado sea un cuadrado perfecto ni que tenga forma regular; la barrera fronteriza puede tener forma cualquiera.) Lo mismo que en el caso homólogo unidimensional, no es difícil calcular la probabilidad de que un paseo iniciado en un punto arbitrario de la región delimitada finalice en una determinada barrera. También podemos determinar el número esperado de pasos (número promedio de pasos correspondiente a una serie

de paseos indefinidamente repetidos) que durará la caminata hasta su fin. Las fórmulas resultantes de tales cálculos tienen aplicaciones científicas tan numerosas como inesperadas, como es la determinación de potenciales en puntos interiores de redes eléctricas, por ejemplo.

Cuando el paseante no está encerrado entre barreras, sino que puede escapar y vagabundear sin restricciones sobre una red cuadrada que se extiende por todo el plano, la situación se complica mucho y plantea problemas todavía no resueltos. Algunos de los teoremas ya demostrados son tan profundos como paradójicos. Veamos qué sucede en un paseo aleatorio sobre un retículo plano infinito, sin barreras. Si la duración del paseo es suficientemente larga, es seguro que el paseante visitará todo vértice del retículo, incluido el punto de partida. Por otra parte, si el paseo prosigue un tiempo arbitrariamente largo, la proporción de veces que el paseante visita un vértice determinado tiende a cero. Estas nociones sirven muy bien para presentar la diferencia radical entre los conceptos de posibilidad lógica y posibilidad práctica, y así lo hace ver John G. Kemeny en un excelente artículo de divulgación titulado «Random Walks» [Paseos aleatorios], en *Enrichment Mathematics for Hígh School*. Desde el punto de vista lógico, existe la posibilidad lógica de que el caminante pueda estar paseándose eternamente sin pasar por un determinado vértice. Para el estadístico, empero, la probabilidad práctica, la plausibilidad, es nula, a pesar de que el número esperado de pasos para alcanzar un vértice prefijado cualquiera sea infinito. Es frecuente tropezarse con situaciones de este tipo al manejar conjuntos infinitos. Por ejemplo, si lanzamos indefinidamente una moneda, existe la posibilidad lógica de que las caras y las cruces se alternen hasta el infinito; más la probabilidad práctica de tal suceso es nula.

Así lo expresa Kemeny: si estamos parados en uno de los cruces del retículo infinito, mientras un amigo nuestro, partiendo de otro cruce cualquiera, se dedica a vagar sin rumbo por la red de calles, podríamos tener la certeza práctica de acabar reuniéndonos con él, siempre y cuando estemos dispuestos a esperar tanto como haga falta. Podríamos dar un enunciado aún más fuerte. Una vez producido el primer encuentro sigue existiendo probabilidad de que si nuestro amigo prosigue su errático paseo por el retículo, volvamos a encontrárnoslo. Dicho de otra forma, es

prácticamente seguro que si un andarín así se tomase todo el tiempo del mundo, acabaría visitando cada cruce una infinidad de veces.

Supongamos ahora que dos paseantes vagabundean al azar por un retículo cuadriculado infinito. ¿Es seguro que lleguen a encontrarse? (Si al comenzar están separados un número impar de pasos y van moviéndose sincrónicamente, nunca podrán reunirse en una esquina, pero sí chocar a medio camino de una de las calles.) Como antes, la respuesta es que si pasean lo suficiente, es seguro que se reunirán tantas veces como deseen. Si tres personas caminan al unísono, vagando por el retículo infinito, y sus posiciones iniciales distan números pares de pasos, es seguro que los tres terminarán por reunirse en algún vértice. Sin embargo, la probabilidad de triple encuentro en un vértice prefijado es ahora menor que 1. Y para cuatro o más paseantes, también cae por debajo de 1 la probabilidad de que se produzca la reunión simultánea en alguno de los puntos del plano.

Aún recibimos sorpresas mayores al estudiar generalizaciones a espacios de dimensión mayor. En un retículo tridimensional (cúbico o no) finito, es prácticamente seguro que un paseante que vaya recorriéndolo al azar llegará a cualquier intersección en un tiempo finito. Como dice Kemeny, si nos encontramos dentro de un gran edificio cuya red interior de pasillos y escaleras es muy complicada, podemos estar seguros de que, aun recorriéndolo a la ventura, más pronto o más tarde daremos con una salida. En cambio, cuando el retículo sea infinito no sucederá así. George Polya demostró, allá por 1921, que la probabilidad de que en una red tridimensional la caminata aleatoria pase por un vértice prefijado es menor que 1, aunque el paseo se prolongue toda la eternidad. En 1940, W. H. McCrea y F. J. H. Whipple demostraron que la probabilidad de que el andarín retorne al origen de su caminata es de sólo 0,35 (aproximadamente), aunque el paseo se prolongue indefinidamente.

Si en lugar de recorrer retículos planos recorremos el propio plano, desplazándonos siempre con un paso de longitud unidad en dirección elegida al azar, la situación se complica en ciertos aspectos, y se simplifica en otros. Por ejemplo, la distancia esperada (la distancia media) que separa al caminante del origen de su caminata tras n pasos de igual longitud, es sencillamente el producto de la longitud del paso por la raíz cuadrada de n. Así lo demostró Albert Einstein en un trabajo sobre

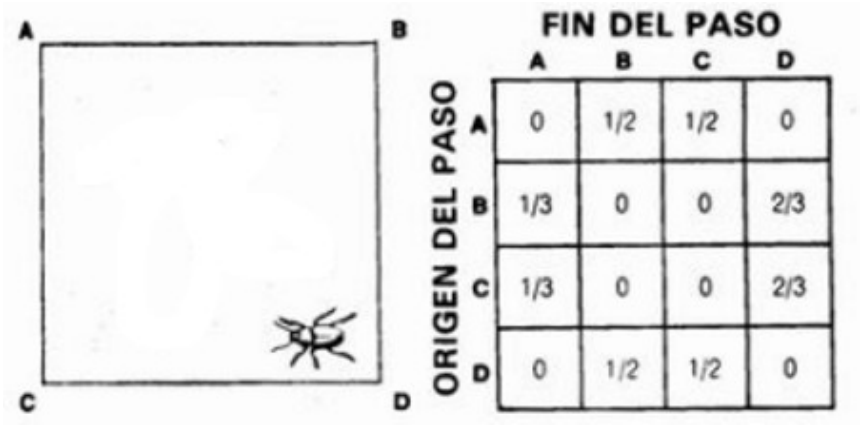
estadística molecular publicado en 1905, el mismo año en que dio a conocer su famoso artículo sobre relatividad. (Idéntico resultado fue obtenido, independientemente, por Marian Smoluchowski. Los lectores podrán ver una demostración sencilla en *One, Two, Three,... Infinity*, de George Garnow; hay traducción española: «Uno, dos tres, ... infinito», Espasa, Calpe. Madrid.)

Los paseos aleatorios discretos a través del espacio obedecen a la misma ley cuadrática anterior. Por otra parte, ni en el espacio ni en el plano es necesario que los pasos sean todos de la misma longitud. Tras *n* pasos, la distancia esperada al origen es el producto de la longitud media de los pasos por la raíz cuadrada de *n*, y por este motivo, los paseos aleatorios resultan de incalculable importancia en el estudio de los procesos de difusión, los movimientos aleatorios de las moléculas de líquidos y gases, la difusión de calor a través de los metales, la propalación de rumores, el contagio de enfermedades, y otros muchos. La evolución de una epidemia gripal es la resultante de muchos millones de paseos aleatorios realizados por sus gérmenes. Podernos hallar aplicaciones en casi todas las ciencias. La primera aplicación importante del método de Monte Carlo (uno de los procedimientos para utilizar los ordenadores con el fin de simular difíciles problemas probabilísticos) consistió en calcular datos sobre paseos aleatorios de neutrones en el seno de diferentes substancias. En fenómenos de difusión como éstos, lo mismo que en el movimiento browniano, es preciso modificar la sencilla ley cuadrática comentada, y tener en cuenta otros muchos factores, como temperatura, viscosidad del medio, etc. Además, tales movimientos son, por lo común, continuos y no discretos, por lo cual se los llama «procesos de Markov», para distinguirlos de las cadenas de Markov. La ley cuadrática da tan sólo una primera aproximación de las distancias medias esperadas. (Si se desean más datos sobre trabajos recientes en este campo, comenzando por el brillante primer artículo que Norbert Wiener dedicó al movimiento browniano en 1920, véase *Brownian Motion and Potential Theory*, por Reuben Hersh y Richard J. Griego, en *Scientific American*, marzo de 1969.)

En un paseo aleatorio un caminante que salga del origen va derivando hacia distancias cada vez mayores, pero no con ritmo constante. Si la caminata se realiza con paso regular, la raíz cuadrada del número de pasos (distancia esperada al origen) va creciendo, pero su tasa de crecimiento es cada vez menor. Cuanto más

largo sea el paseo, tanto más lentamente crece la deriva. En el libro ya citado, Gamow da un ejemplo espectacular. Un cuanto de luz cercano al centro del Sol tarda alrededor de 50 siglos en emerger a la superficie, pues su trayectoria en el interior del astro es tan errática como la de un borracho. Pero una vez liberado del Sol, el fotón llegará en tan solo ocho minutos a la superficie terrestre, si toma la dirección adecuada.

He aquí una cuestión sencilla. Dos caminantes parten de un mismo punto del plano. Uno realiza un paseo aleatorio de 70 pasos de longitud unidad y luego se detiene. El otro se para después de sólo 30 pasos. ¿Qué distancia podemos esperar que los separe al terminar?



ORIGEN DEL PASO \ FIN DEL PASO	A	B	C	D
A	0	1/2	1/2	0
B	1/3	0	0	2/3
C	1/3	0	0	2/3
D	0	1/2	1/2	0

Figura 38. "Caminata ergódica" por un cuadrado (a la izquierda) y matriz estocástica de sus probabilidades de transición (derecha)

Nos fijaremos ahora en un tipo de paseo totalmente diferente de los comentados ya. Imaginemos un insecto que parte del vértice A del cuadrado que vemos a la izquierda de la Figura 38, y va caminando al azar a lo largo de los lados. En lugar de suponer iguales las «probabilidades de transición» de vértice a vértice, como hemos venido haciendo, supongamos que en los vértices B y C la probabilidad de que el insecto se dirija hacia D sea doble de la probabilidad de que regrese a A. Cuando está situado en A o en D, el bichito ha de elegir entre dos caminos, cada uno con probabilidad 1/2, mientras que en B y C tomará el camino hacia D con probabilidad 2/3 y el retorno a A con probabilidad 1/3. Aunque la malla es finita, como no hay

barreras absorbentes, el paseo no concluye jamás. Las caminatas de este tipo acostumbran a llamarse «paseos ergódicos». Deseamos calcular la proporción de veces que con respecto al total el insecto visitará cada uno de los vértices.

Uno de los procedimientos para lograrlo es formar la matriz «estocástica» que se muestra a la derecha de la ilustración, donde se dan las probabilidades de transición de unos vértices a otros. Los ceros de la matriz indican transiciones imposibles, Puesto que cada estado de la cadena de Markov ergódica ha de conducir a otro, la suma de las probabilidades de cada fila-filas que suelen llamarse «vectores probabilísticos», tiene que ser igual a 1.

La probabilidad de que el bichito visite un vértice dado es la suma de las probabilidades de que lo visite, cuando se encuentra en cada uno de los vértices adyacentes.

Por ejemplo, la probabilidad de que se encuentre en D es la suma de la probabilidad de que vaya a D desde B más la probabilidad de que vaya a D desde C. (Atención, estas probabilidades son «a largo plazo»; no son las probabilidades de que el insecto se dirija a D cuando echa a andar en B o en C.) Sea *d* la probabilidad de que el insecto se encuentre en el vértice D, sabiendo que en ese instante se encuentra en un vértice cualquiera, y sean *a, b*, y *c* las probabilidades correspondientes a los vértices A, B, y C. Mirando la columna D de la matriz de transición, vernos que la probabilidad de que «a la larga» el insecto se dirija de B a D es $b(2/3)$, y desde C a D, $c(2/3)$. La probabilidad a largo plazo de que el bicho se encuentre en D es por tanto la suma de estas dos probabilidades, y podemos así plantear la ecuación:

$d = b(2/3) + c(2/3)$,

o escrita en forma habitual,

$d = 2b/3 + 2c/3$.

Las otras tres columnas de la matriz nos dan otras tantas ecuaciones para *a, b* y *c:*

$a = b/3 + c/3$

$b = a/2 + d/2$

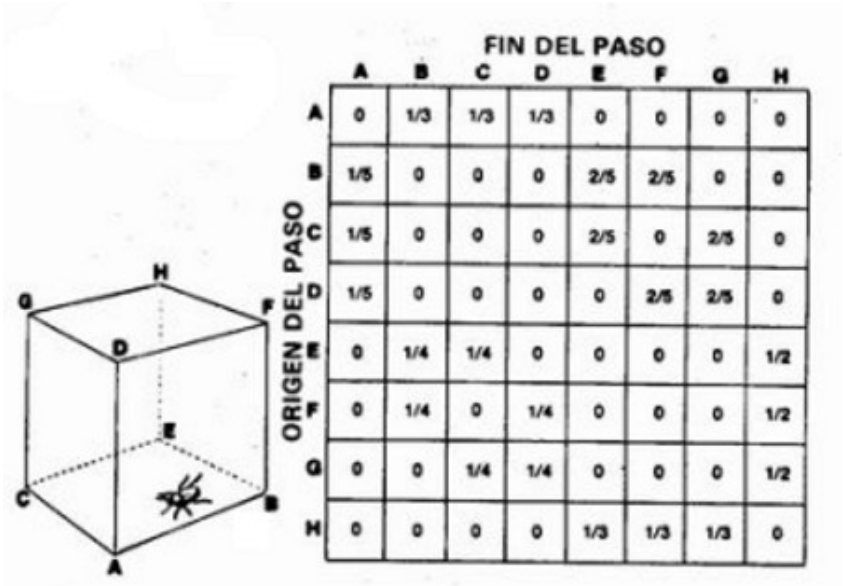
$c = a/2 + d/2$

Cuando el insecto no se encuentre caminando por uno de los lados, seguro que se encontrará en un vértice, y así

$a + b + e + d = 1$

Basta una ojeada a este sistema de ecuaciones para observar que b = c y que d = 2a; ahora es fácil resolverlo hasta el final: a = 1/6, b 1/4, c = 1/4, d = 1/3. El insecto pasará la sexta parte del tiempo que descanse en los vértices en el vértice A, 1/4 de ese tiempo en B, 1/4 en C, y 1/3 en D. Su estadía en D será doble de la pasada en A.

Sin duda los lectores encontrarán entretenido ensayar la misma técnica en el problema análogo sobre un cubo, que Kemeny propone en el artículo ya mencionado.



ORIGEN DEL PASO \ FIN DEL PASO	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0
B	1/5	0	0	0	2/5	2/5	0	0
C	1/5	0	0	0	2/5	0	2/5	0
D	1/5	0	0	0	0	2/5	2/5	0
E	0	1/4	1/4	0	0	0	0	1/2
F	0	1/4	0	1/4	0	0	0	1/2
G	0	0	1/4	1/4	0	0	0	1/2
H	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3	0

Figura 39. Caminata aleatoria ergódica sobre las aristas de un cubo(izquierda) y la matriz de sus probabilidades de transición (a la derecha)

En el cubo que vemos en la parte izquierda de la Figura 39, la probabilidad de que el insecto se dirija hacia H es doble de la de que se mueva en dirección a A. La matriz estocástica de probabilidades de transición puede verse a la derecha del

cubo. El sistema de ecuaciones correspondientes a las ocho columnas, juntamente con la ecuación

$$a + b + e + d + e + f + g + h = 1$$

tiene solución única. Al realizar su caminata ergódica perpetua, 3/54 de sus visitas a vértices serán a A, 5/54 a cada uno de los vértices B, C, D, 8/54 a cada uno de los vértices E, F, G, y 12/54 a H. Así que visitará el vértice H con frecuencia cuatro veces mayor que el A.

Cuando un paseo ergódico de este tipo es simétrico, en el sentido de que en cada vértice cada uno de los posibles pasos siguientes tienen la misma probabilidad, la fracción de visitas dedicadas a cada par de vértices dados cualesquiera es proporcional al número de paseos distintos que llevan a estos dos vértices. Por ejemplo, un gato que realizase una caminata ergódica simétrica por los vértices de la Gran Pirámide de Egipto, visitaría la cúspide cuatro veces por cada tres que pasara por cada uno de los vértices de la base, pues a la cúspide se puede llegar por cuatro caminos, mientras a los vértices de la base sólo se llega por tres. Es fácil escribir la matriz de transición y dar las ecuaciones, que muestran que a largo plazo el gato dedica a la cúspide 1/4 de las visitas que hace a los vértices, y 3/16 a cada uno de los vértices de la base.

He aquí otro problema fácil. Supongamos que en el cubo de la Figura 39, y con la misma matriz estocástica, una mosca comience un paseo aleatorio en A. Al mismo tiempo, una araña comienza en H otro paseo aleatorio. Ambas, mosca y araña, se mueven sincrónicamente y a la misma velocidad. ¿Cuál es la probabilidad de que se tropiecen a mitad de una arista, tras haber recorrido como mínimo una arista y media?

Hay otros muchos entretenidos problemas relacionados con paseos ergódicos aleatorios a lo largo de las aristas de cubos u otros poliedros regulares. Si un insecto beodo parte de un vértice de un cubo y camina hasta el vértice más alejado, optando en cada vértice con igual probabilidad por uno de los tres posibles caminos, su paseo tendrá, en promedio, una longitud de 10 aristas. Si el insecto sólo está «semibeodo», en el sentido de que nunca retornará por uno de los lados recién

recorridos, sino que optará con igual probabilidad por uno de los otros dos, su caminata desde un vértice al diagonalmente opuesto tendrá, en promedio, 6 lados. En ambos casos, el paseo promedio con retorno al punto de partida tiene 8 aristas, igual al número de vértices del cubo.

Y no es por casualidad. Thomas O'Beirne, de Glasgow, a quien debo el término «semibeodo», ha demostrado (aunque no publicado) que en toda red regular donde cada vértice sea topológicamente equivalente a cada uno de los demás, los paseos aleatorios con retorno al punto de partida tienen por término medio el mismo número de pasos que vértices tenga en total la red. Tal afirmación es válida tanto si el andarín elige en cada nudo entre todos los caminos posibles con igual probabilidad, o sólo entre aquellos que excluyen el que acaba de recorrer. Es decir, tanto si el insecto está completamente beodo como si sólo esta medio «colocado», para ir paso a paso desde un vértice del cuadrado hasta retornar al mismo necesitará por término medio cuatro pasos. Las aristas de todos los poliedros platónicos y arquimedianos forman redes espaciales de este mismo tipo. Sobre un tetraedro un insecto beodo o semibeodo recorrerá en promedio cuatro aristas antes de retornar al vértice de partida; en un dodecaedro pasará por 20 aristas, etc. Los lectores interesados en métodos para plantear las ecuaciones que permiten calcular paseos promedios sobre redes de esta naturaleza encontrarán explicado el procedimiento, particularizado al dodecaedro, en las soluciones de los problemas E 1752 y E 1897 en *The American Mathematical Monthly*, febrero de 1966, p. 200, y octubre de 1967, pp. 1.008-10. Para el rombo-dodecaedro, que no es regular, véase el artículo de O'Beirne, «A Nonsense Result in the Traffic Statistics of Drunk Flies», en el «Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications» agosto de 1966, pp. 116-19.

No es menester que en cada paso haya de saltarse a un vértice adyacente de la red. Fijémonos en el paseo simétrico y ergódico de una torre en el tablero de ajedrez. Se supone que en cada jugada la torre elige entre los movimientos lícitos con igual probabilidad. Como cada escaque es accesible desde otros catorce, la probabilidad de transición de cada jugada es 1/14. Por consiguiente, la torre pasará en todas las casillas tiempos iguales.

Para otras piezas la situación es diferente, porque las probabilidades de transición no son idénticas. Los caballos, por ejemplo, sólo pueden alcanzar los ángulos del tablero desde dos casillas, mientras que cada uno de los 16 cuadros centrales es atacable desde otros ocho. Puesto que la proporción es ahora de 2/8 o sea, 1/4, se sigue que durante un paseo aleatorio sin fin el caballo visitará un vértice determinado con frecuencia cuatro veces menor que un cuadro determinado elegido entre los 16 centrales. Puede verse una demostración en «Generalized Symmetric Random Walks», por Eugene Albert, en *Scripta Mathematica*, agosto de 1964, pp. 185-87.

Complementos

En este capítulo hemos encontrado ya un precioso teorema, que con terminología de la teoría de grafos podemos enunciar así: tomemos un grafo regular arbitrario, es decir, un grafo donde cada nudo es origen de igual número de líneas. Si un insecto parte de un nudo cualquiera y realiza un paseo aleatorio, optando en cada nudo por una de las líneas, todas elegibles con igual probabilidad, el número esperado de pasos (número promedio) para retornar al nudo de partida es igual al número de nudos del grafo.

Aunque di algunas referencias donde se explica cómo calcular tales caminatas, no puse ningún ejemplo. Puede ser interesante ver cómo se haría en triángulos y tetraedros; los lectores podrían entonces generalizar el procedimiento a lados de polígonos y aristas de poliedros así como a otros grafos regulares.

Sean *A, B, C* los vértices de un triángulo. Deseamos conocer la longitud esperada de un paseo aleatorio que partiendo de *A* retorne hasta *A*, suponiendo que en cada vértice se elija entre los dos lados con igual probabilidad.

Observemos que ello equivaldría a declarar que *A* es barrera absorbente (una vez dado el primer paso) y pedir entonces la longitud esperada del paseo aleatorio hasta que el bichito sea absorbido.

Sea *x* la longitud esperada de un paseo desde *B* hasta *A*. Por razones de simetría, esta longitud es igual a la del paseo desde *C* hasta *A*.

Supongamos que el bicho se encuentra en *B*. Si opta por dirigirse directamente a *A*, el camino esperado tiene longitud 1. Si opta por dirigirse a *C*, la longitud del camino

esperado será 1 más la longitud esperada del camino desde C hasta A. Como esta última es *x*, la longitud esperada del camino que va desde *B* hasta *A* pasando por *C* es (1 + *x*). Se suman las longitudes de los dos caminos, y se divide por 2 (pues el insecto elige uno de los dos con probabilidad 1/2), con lo cual obtendremos su promedio. Resulta la sencilla ecuación:

$$x = \frac{1 + (1 + x)}{2}$$

de donde $x = 2$.

Sabemos ahora que si el insecto sale de *B* o de *C*, la longitud esperada del camino hasta *A* es 2. Sin embargo, si el insecto partiera de *A*, tendría que dar primero un paso para llegar a *B* o a *C*, y luego retornar desde allí. Por consiguiente, la longitud esperada del circuito de ida y vuelta desde *A* es 1 + 2 = 3.

El problema se resuelve igual sobre el tetraedro. Sean *A, B, C, D* sus vértices. El insecto sale de *B*. Si decidiera ir directamente hasta *A* su viaje tendría longitud 1. Si optase por dirigirse a *C* o *D*, la longitud esperada del viaje a *A* es (1 + *x*). Por consiguiente, la caminata promedio desde *B* hasta *A*, es 1 + (1 + *x*) + (1 + *x*) dividido entre 3. Nuestra ecuación es ahora:

$$x = \frac{1 + (1 + x) + (1 + x)}{3}$$

de donde resulta que *x* tiene que ser 3. El insecto situado en *A* tiene primero que dar un paso para llegar a uno de los tres vértices; por consiguiente, el camino esperado desde *A* hasta retornar a *A* es 1 + 3 = 4.

Como ejercicio, el lector podría entretenerse en demostrar que en un cuadrado o un cubo la longitud esperada de los paseos que parten de un vértice y retornan a él es, respectivamente, de 4 y 8. Lo único que sucede es que las ecuaciones son algo más complicadas.

Soluciones

1. Dos personas salen del mismo punto del plano. Una realiza una caminata aleatoria de 70 pasos, todos de longitud unidad; la otra, un paseo de 30. ¿Cuál es la distancia esperada (promedio) que los separará al terminar? La

cuestión equivale a preguntarse cuál será la distancia esperada al origen de un andarín que diese una caminata de 100 pasos; para verlo basta imaginar que uno de ellos desanda su paseo, retornando al origen, y luego prosigue siguiendo las huellas del otro. Ya sabemos que tal distancia esperada es la raíz cuadrada del número de pasos. La respuesta, por tanto, es 10 unidades.

2. A causa de la simetría del cubo, cualquiera que sea el primer paso que dé la mosca borracha, es seguro que la acercará al vértice diagonalmente opuesto, desde donde la araña ha comenzado simultáneamente su caminata. Por consiguiente, nada importa cuál sea el primer paso de la mosca. Sin embargo, de los tres pasos equiprobables de la araña sólo dos la conducen a vértices adyacentes a la mosca. Por consiguiente, la probabilidad de que tras dar cada una su primer paso estén situadas, mosca y araña, en vértices contiguos es de 2/3. Para cada par de posibles vértices contiguos que puedan ocupar, la probabilidad de que la mosca se mueva hacia la araña es 2/5, y la probabilidad de que la araña vaya hacia la mosca, 1/4. El producto de estas tres probabilidades, 2/3, 2/5 y 1/4, es 1/15. Esta será la probabilidad de que mosca y araña se tropiecen a media arista, tras viajar cada una 1 1/2 lados.

Capítulo 8
Algebra de Boole

Aunque Aristóteles se limitó casi exclusivamente al estudio del silogismo, a él es preciso atribuir todo el mérito de la fundación de la lógica formal. En nuestros días, el silogismo no es más que un capítulo trivial de la lógica. Cuesta trabajo creer que durante 2.000 años fuese tema principal de los estudios lógicos, y que en fecha tan tardía como 1797, nada menos que Immanuel Kant pudiese escribir que la lógica era «un cuerpo de doctrina cerrado y completo».

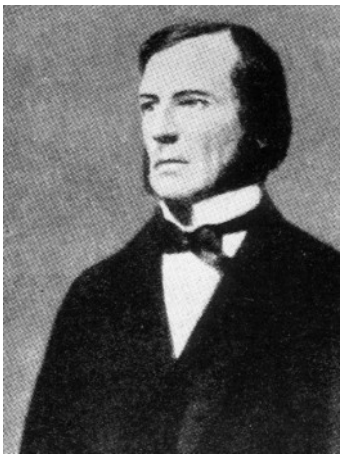


Figura 40. George Boole

«En la inferencia silogística», escribió en cierta ocasión Bertrand Russell «se supone que uno sabe ya que todos los hombres son mortales y que Sócrates es un hombre; y de ahí uno deduce lo que jamás había sospechado, a saber, que Sócrates es mortal. Esta forma de inferencia se da realmente, aunque muy raras veces». Russell continúa explicando que el único ejemplo del que tuvo noticia le llegó a través de un número satírico de *Mind*, una revista inglesa dedicada a temas filosóficos, en un número especial preparado por la redacción para celebrar las navidades de 1901. Allí, un filósofo alemán, mirando perplejo los anuncios de la revista, terminó por razonar así: «En esta revista todo es broma; los anuncios se encuentran en la revista. Por consiguiente, los anuncios son pura broma.» En otro lugar, Russell escribió también: «Si tiene usted la intención de dedicarse a la lógica, he aquí un buen consejo en el que nunca insistiré bastante: no estudie la lógica tradicional. En

los tiempos de Aristóteles fue sin duda un esfuerzo meritorio. Pero lo mismo podemos decir de la astronomía ptolemaica.»

El cambio crucial se produjo en 1847. En esa fecha, George Boole (1815 - 1864), hombre modesto y autodidacta, hijo de un humilde zapatero inglés (véase la Figura 40) publicó *The Mathematical Analysis of Logic*. Este y otros trabajos fueron motivo de su nombramiento como profesor de matemáticas (pese a carecer de títulos universitarios) del *Queens College* (hoy *University College*) de Cork, en Irlanda. Allí escribió su tratado *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (Londres, 1854). La idea fundamental: sustituir por símbolos todas las palabras utilizadas en lógica formal, ya se les había ocurrido antes a otros, pero Boole fue el primero en conseguir un sistema operativo. Con raras excepciones, ni filósofos ni matemáticos prestaron mucho interés a logro tan notable. Quizá fuera ésta una de las razones de la tolerancia que Boole mostraba por los matemáticos más excéntricos. Boole escribió un artículo sobre un chiflado de Cork, de nombre John Walsh (*Philosophical Magazine*, noviembre de 1851), que Augustus de Morgan, en su *Budget of Paradoxes*, califica de «la mejor biografía que conozco sobre héroes de este género».

Boole murió de una neumonía, cuando contaba 49 años. Su enfermedad fue atribuida a un enfriamiento, por dar una lección magistral con la ropa mojada a consecuencia de un chaparrón. Dejó esposa y cinco hijas. Gracias a Norman Gridgeman («In Praise of Boole», véase la bibliografía) hemos podido conocer algunos detalles fascinantes sobre estas seis mujeres. Mary Everest, esposa de Boole, divulgó por escrito las ideas de su marido sobre matemáticas y pedagogía. Uno de ellos se titula *The Philosophy and Fun of AIgebra*. La mayor de las hijas, Mary, se casó con Charles Hinton, matemático que escribió la primera novela sobre Planilandia (véase el Capítulo 12 de mi *Unexpected Hanging*) y también libros sobre la cuarta dimensión.

Margaret fue madre de Sir Geoffrey Taylor, un matemático de Cambridge. Alicia, picada en su curiosidad por las incursiones de Charles Hinton en espacios de dimensión mayor que tres, hizo por su cuenta algunos descubrimientos importantes en este campo. Lucy llegó a profesora de química. La menor de las hijas, Ethel Lilian, se casó con un científico polaco, Wilfrid Voynich, estableciéndose en Manhattan, donde Ethel murió en 1960. Fue autora de varias novelas, entre ellas *The Gadfly* (1898), que adquirió gran popularidad en Rusia e inspiró nada menos que tres óperas. En tiempos más recientes, se han vendido en China más de un millón de ejemplares de esta novela. «Los rusos de nuestros días se muestran muy sorprendidos», escribe Gridgeman, «al ver que tan pocas personas de nuestra cultura hayan oído hablar de E. L. Voynich, la novelista inglesa».

Los pocos que supieron apreciar el genio de Boole (y entre ellos hay que destacar al matemático Ernst Schroder) perfeccionaron rápidamente la notación de Boole, que era fastidiosa por su empeño en que se asemejase al álgebra tradicional. En nuestros días, la frase «álgebra de Boole» alude a un sistema abstracto, «ininterpretado», axiomatizable en multitud de formas, pero que en esencia es una versión simplificada, «aerodinámica», del sistema de Boole. «Ininterpretado» quiere decir que a los símbolos de la estructura no se les atribuye significado alguno, ni lógico, ni matemático, ni del mundo sensible.

Lo mismo que en todas las álgebras puramente abstractas, a los símbolos de un álgebra booleana se les pueden asignar muchas interpretaciones distintas. El propio Boole interpretó su sistema a la manera aristotélica, como un álgebra de clases y de sus propiedades, pero al hacerlo amplió enormemente la antigua lógica de clases, desencorsetándola de los estrechos confines del silogismo. Como la notación original de Boole ha caído en desuso, el álgebra booleana moderna se expresa en símbolos de la teoría de conjuntos, pues los conjuntos son lo mismo que Boole llamaba clases: colecciones cualesquiera, compuestas por «elementos» individuales.

Los conjuntos pueden ser finitos, como el formado por los números 1, 2, 3, o el de los habitantes de Málaga que tengan ojos verdes, o los vértices de un cubo, los planetas del sistema solar, o cualquier otra colección de cosas. Hay también conjuntos infinitos, como por ejemplo el conjunto de todos los números pares y, tal vez, el de todas las estrellas. Si tomamos un conjunto concreto, finito o infinito, y

en él formarnos la colección de todos sus subconjuntos (entre los que se cuentan el conjunto completo y el conjunto vacío, que carece de elementos), esta colección, junto con la relación de inclusión de unos conjuntos en otros, forma un álgebra booleana de conjuntos.

En la notación moderna se usan letras para denotar los conjuntos, subconjuntos y elementos de tales álgebras. El «conjunto universal», que es el mayor de los conjuntos que se están manejando, se simboliza $\cup$. El conjunto nulo o vacío, es Ø. La unión de los conjuntos *a* y *b* (que reúnen un solo conjunto los elementos de *a* y los de *b*) se simboliza $a \cup b$, la «operación» de unión se representa $\cup$. (La unión de 1, 2, 3 y 4, 5 es 1, 2, 3, 4, 5.) La «intersección» de los conjuntos *a* y *b* (formada por los elementos que pertenecen simultáneamente a ambos) se denota $a \cap b$; el símbolo $\cap$ es el símbolo de la operación de intersección. (La intersección de 1, 2, 3 y 3, 4, 5 es el conjunto formado solamente por 3.) Cuando dos conjuntos son idénticos (por ejemplo, el conjunto de los números enteros impares es igual al conjunto de los números enteros que divididos por 2 dan resto 1), esto es, cuando están formados por los mismos elementos, se puede colocar entre ambos el símbolo « = ». El «complemento» del conjunto *a*, formado por todos los elementos del conjunto universal que no pertenezcan a *a*, se denota *a*'. (Así, el complemento del conjunto 1, 2 con respecto al conjunto universal 1, 2, 3, 4, 5 es 3, 4, 5.) Finalmente, la relación binaria fundamental entre elementos y conjuntos es la llamada «relación de pertenencia», denotada $\in$;al escribir $a \in b$ estamos diciendo que *a* es miembro o elemento de *b*.

Mencionaré, por ser de interés histórico, que entre los símbolos utilizados por Boole los había para elementos, para clases y para subclases. Así, 1 era la clase universal; 0 la clase vacía o nula; + denotaba la suma de clases (suma que Boole entendía en sentido «excluyente», es decir, que de las clases sumandos se tomaban tan sólo aquellos elementos no poseídos simultáneamente por ambas; la unión o suma incluyente moderna fue utilizada por vez primera por William Stanley Jevons, lógico y economista británico, y presenta tantas ventajas que los lógicos posteriores la han adoptado sin dudar); la intersección de clases se denotaba con el símbolo *x* ; = era la identidad; y el signo menos,, , indicaba que de la primera de dos clases debían eliminarse los elementos pertenecientes a la otra. Para denotar la clase

complementaria de *x*, Boole escribía 1- *x*. Al no disponer de símbolo específico para la inclusión, expresaba esta idea de diversas formas, como *a x b* = *a*, que significa que la intersección de *a* y *b* es idéntica a *a*.

El álgebra booleana de conjuntos admite una representación gráfica muy elegante gracias a los llamados diagramas de Venn (en honor del lógico inglés John Venn), que hoy son cosa corriente en las clases de matemáticas de todos los niveles, incluso los más elementales. Los diagramas de Venn se sirven de círculos trazados en el plano para denotar conjuntos. Por ejemplo, podemos representar la unión de dos conjuntos mediante dos círculos que se traslapan, es decir, se superponen parcialmente. (Véase la Figura 41.)

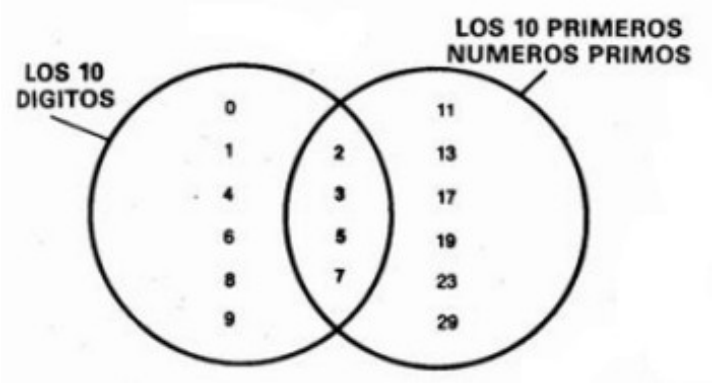


Figura 41. Diagrama de Venn para la intersección de conjuntos

En el ejemplo suponemos que los conjuntos son los diez números dígitos, por una parte, y los diez primeros números primos por otra. No nos ocuparemos más que de los elementos contenidos en alguno de los círculos; los 16 elementos expresados son la unión de los dos conjuntos. La zona de superposición contiene la intersección de ambos, que está formada por 2, 3, 5, 7, o sea los números primos contenidos entre los diez números dígitos.

Adoptando el convenio de sombrear todas las regiones que sepamos representan conjuntos vacíos, podemos ver cómo los diagramas de Venn sirven para demostrar silogismos., Por ejemplo, el que con tanto sarcasmo citaba Russell. Los círculos rotulados denotan los conjuntos de hombres, de seres mortales y de Sócrates (conjunto que en este caso tiene sólo un elemento). La primera premisa, «Todos los hombres son mortales» queda traducida al diagrama sombreando casi todo el

círculo «Hombres» y, expresando así que la clase de hombres no mortales es vacía (véase la Figura 42, izquierda).

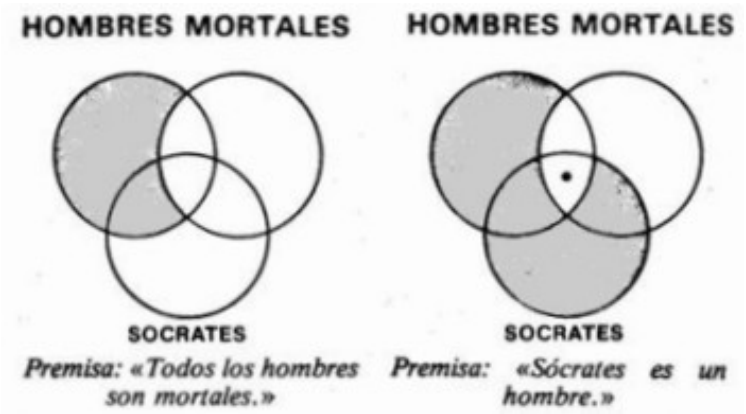


Figura 42.

La segunda premisa «Sócrates es hombre» se traduce de forma análoga, sombreando el círculo de Sócrates para mostrar que la totalidad de Sócrates, a saber, él mismo, está dentro del círculo de «hombres» (véase la Figura 42, derecha). Ahora inspeccionamos en el diagrama si la conclusión «Sócrates es mortal» es válida o no. Lo es, en efecto. La totalidad de Sócrates (la parte no sombreada de su círculo, marcada con un punto) está dentro del círculo de seres mortales. Beneficiándonos de las propiedades topológicas de las curvas cerradas del plano disponemos de un método de representación gráfica que es isomorfo al álgebra booleana de conjuntos.

El propio Boole propuso la primera interpretación nueva e importante de su álgebra, haciendo ver que si a los enunciados verdaderos les asignamos un 1 y a los falsos un 0, su cálculo puede ser aplicado a proposiciones o enunciados que sean, bien verdaderos, bien falsos. Boole no pudo desarrollar su programa, pero sí sus continuadores. Hoy lo conocemos por cálculo proposicional, que es el cálculo que se ocupa de la veracidad o falsedad de enunciados conectados por relaciones binarias, tales como «Si *p*, entonces *q*», «o bien *p*, o bien *q*, pero no ambas», «Si y solamente si *p*, entonces *q*». «No ambas *p* y *q*» y otras muchas semejantes. En la tabla de la Figura 43 vemos los símbolos del cálculo proposicional en correspondencia con los símbolos del álgebra de Boole.

ALGEGRA BOOLEANA DE CONJUNTOS	CALCULO PROPOSICIONAL
U (CONJUNTO UNIVERSAL)	V (VERDADERO)
ϕ (CONJUNTO VACIO)	F (FALSO)
a, b, c, ... (CONJUNTOS, SUBCONJUNTOS, ELEMENTOS)	*p, q, r, ...* (PROPOSICIONES)
$a \cup b$ (UNION: TODOS LOS ELEMENTOS DE *a* y de *b*)	$p \vee q$ (DISYUNCION: O BIEN *p*, O BIEN *q*, O AMBAS SON VERDADERAS)
$a \cap b$ (INTERSECCION: LOS ELEMENTOS COMUNES A *a* y *b*)	$p \cdot q$ (CONJUNCION: *p* y *q* SON AMBAS VERDADERAS)
$a = b$ (IDENTIDAD: *a* y *b* SON EL MISMO CONJUNTO)	$p \equiv q$ (EQUIVALENCIA: *q* ES VERDADERA SI *p* LO ES, Y SOLO EN ESE CASO)
a' (COMPLEMENTO: TODO LO DE U QUE NO PERTENEZCA A *a*)	$\sim p$ (NEGACION: *p* ES FALSA)
$a \in b$ (INCLUSION: *a* ES UN ELEMENTO DE *b*)	$p \cup q$ (IMPLICACION: SI *p* ES VERDADERA, *q* ES VERDADERA)

Figura 43. Símbolos correspondientes en dos versiones del álgebra de Boole

Es fácil comprender la isomorfía de las dos interpretaciones analizando el silogismo relativo a Sócrates. En lugar de decir «Todos los hombres son mortales», que expresa una premisa mediante propiedades de clase o inclusión de conjuntos, podemos formularla mediante la condicional «Si *x* es hombre, entonces *x* es mortal». Lo que hemos hecho es formular dos proposiciones y enlazarlas mediante una «conectiva» llamada «implicación» (o más propiamente, «condicional»). Podemos traducir esta condicional al diagrama de Venn exactamente igual que hicimos con «todos los hombres son mortales». En efecto, todas las relaciones binarias del cálculo proposicional pueden ser traducidas a diagramas de Venn, y usar después los círculos del diagrama para resolver problemas sencillos del cálculo proposicional. Es una vergüenza que los autores de la mayoría de los textos de introducción a la lógica formal no hayan acertado a servirse de este recurso. Siguen utilizando diagramas para ilustrar la vieja lógica de inclusión de clases, pero parecen incapaces de aplicarlos al cálculo proposicional, donde su eficacia no es menor. Y de

hecho es superior, pues no es preciso preocuparse del «cuantificador existencial», que sirve para declarar que una clase no es vacía porque posee al menos un elemento. En lógica tradicional se utilizaba para este propósito el indefinido «algún» (corno en «algunas manzanas son rojas»). Para poder dar cuenta de tales enunciados Boole tuvo que trenzar en su álgebra toda suerte de intrincados nudos.
Para ver lo fácilmente que los diagramas de Venn permiten resolver ciertos tipos de acertijos lógicos, tomemos las siguientes premisas relativas a tres hombres de negocios, Antonio, Benito y Carlos, que almuerzan juntos todos los días laborables.

1. Siempre que Antonio pide un martini, Benito también.
2. O bien Benito, o bien Carlos piden siempre un martini, pero nunca ambos a la vez el mismo día.
3. Todos los días, bien Antonio, bien Carlos, o ambos, piden un martini.
4. Cuando Carlos pide un martini, también lo pide Antonio.

Para traducir estos asertos a diagramas de Venn, interpretamos el hecho de tomar un martini como «verdadero», y el de no tomarlo, como «falso». Las ocho regiones en que los círculos traslapados dividen el plano están dibujadas en la Figura 44, señaladas de forma que muestren todos los posibles valores de verdad de *a, b* y *c*, que representan a Antonio, Benito y Carlos. Así, la región marcada *a, ~b, c*, indica que Antonio y Carlos toman martini, pero Benito no. Intente el lector sombrear las regiones declaradas vacías por las premisas, y examine después el resultado, para determinar así quiénes tomarían aperitivo si tuviésemos que almorzar con ellos.

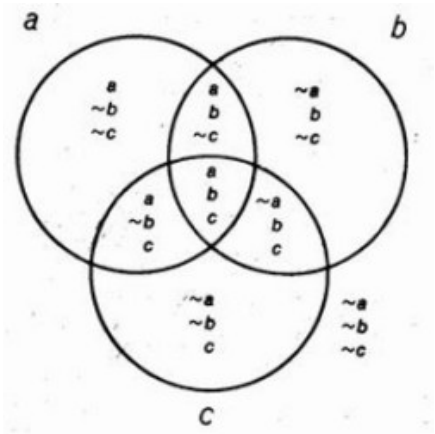


Figura 44. Diagrama de Venn para el acertijo de los martinis

El álgebra booleana admite muchas otras interpretaciones. Por ejemplo, cabe considerarla como caso particular de otras estructuras abstractas llamadas anillos y también como caso particular de otro tipo de estructuras llamadas retículos. Admiten interpretación dentro de la teoría combinatoria, de la teoría de la información, la teoría de grafos, la teoría de matrices, y en general, dentro de las teorías metamatemáticas de sistemas deductivos. En estos últimos años, una de sus más útiles interpretaciones lo ha sido en teoría de conmutación, que es de máxima importancia para el diseño de ordenadores electrónicos, aunque no se limita a redes eléctricas. Es aplicable a cualesquiera tipos de transmisión de energía a través de canales provistos de dispositivos de conexión, desconexión o conmutación a otros canales.

La energía puede ser la de gases o líquidos que fluyen por conductos, corno sucede en los modernos sistemas de control hidroneumático (véase «Fluid Control Devices», por Stanley W. Angrist, en *Scientific American*, diciembre de 1964). Puede consistir en rayos luminosos. Puede ser energía mecánica, como en la máquina lógica ideada por Jevons para resolver problemas de cuatro términos en álgebra booleana. Pueden ser bolitas rodantes, corno sucede en algunos juguetes que simulan ordenadores. Si los hipotéticos habitantes de otros planetas tuvieran muy desarrollado el olfato, sus máquinas de cálculo podrían exteriorizar los resultados a través de orificios de olisqueo. Mientras pueda distinguirse claramente el desplazamiento o no desplazamiento de energía por cada canal, cabrá establecer un isomorfismo entre los dos valores energéticos y los dos valores de verdad del cálculo proposicional. A cada conectiva binaria del cálculo le corresponde un circuito de conmutación. Vemos en la Figura 45 tres ejemplos sencillos. El circuito representado en la parte inferior se utiliza cuando hay necesidad de controlar un punto de luz desde dos conmutadores distantes entre sí. Es fácil ver que cuando la luz está apagada basta cambiar el estado de uno de los conmutadores para

encenderla, y que si la luz está encendida, basta actuar sobre cualquiera de ellos para apagarla.

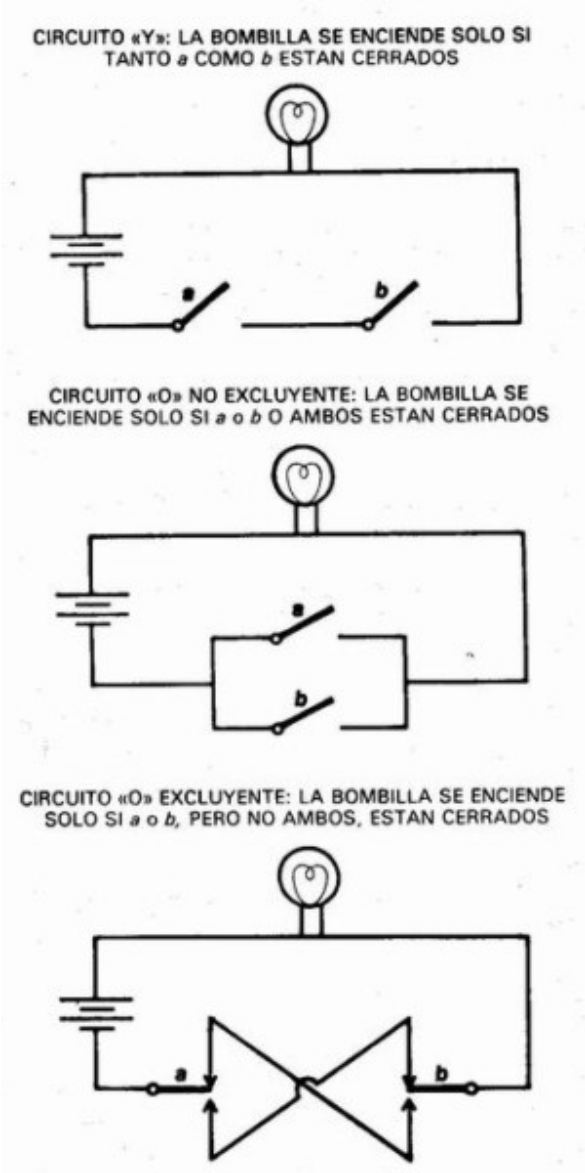


Figura 45. Circuitos para tres relaciones binarias

Aunque esta interpretación eléctrica de álgebra booleana había sido propuesta ya en 1910 por Paul S. Ehrenfest en una revista rusa, y luego, independientemente, en otra japonesa en 1936, el primer trabajo verdaderamente importante, el que sirvió para introducir el tema en el diseño de computadores, es el debido a Claude E.

Shannon, «A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits», en *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 57, diciembre de 1938, trabajo inspirado en la tesis que Shannon hubo de presentar para el grado master por el *Massachusetts Institute of Technology*.

Desde los tiempos del artículo de Shannon, el álgebra de Boole ha adquirido importancia fundamental en el diseño de ordenadores y sistemas automáticos, pues permite la simplificación de circuitos y el ahorro de «hardware». El circuito es traducido primero a un enunciado de lógica simbólica; el enunciado es «minimizado» luego por métodos muy ingeniosos; y finalmente, el enunciado simplificado vuelve a ser traducido a un circuito, que admite ahora diseño más sencillo. Como todos sabemos, en los ordenadores modernos los conmutadores ya no son relés electromagnéticos ni válvulas termoiónicas, sino transistores y otros pequeñísimos dispositivos semiconductores.

Veamos ahora una última interpretación del álgebra booleana, que es verdaderamente curiosa. Fijémonos en los ocho números de la siguiente sucesión: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Como vemos, se trata de los divisores de 30, incluidos el 1 y el propio 30. Interpretemos la «unión» de dos de ellos como el mínimo común múltiplo de ambos, y la «intersección», como su máximo común divisor. La inclusión de conjuntos se traduce ahora en la relación binaria «ser divisor de». El papel del conjunto universal lo hace aquí el número 30; el del conjunto vacío, el 1. Dado un número *a* de esta colección, su complemento es 30/*a*, que también pertenece al conjunto. Resulta que con esta nueva interpretación de las relaciones de Boole seguimos teniendo una estructura booleana coherente. Todos los teoremas del álgebra booleana tienen contrapartida en este curioso sistema basado en los divisores de 30. Por ejemplo, en el álgebra booleana, el complementario del complementario de *a* es sencillamente *a*; en la interpretación de cálculo proposicional, tenemos que la negación de una negación es idéntica a la no negación. Con más generalidad, tan sólo una serie impar de negaciones equivale a una negación. Apliquemos esta ley booleana al número 3. Su complementario es 30/3 = 10. El complementario de 10 es 30/10 = 3, que nos devuelve el número 3 inicial.

Examinemos dos famosos teoremas del álgebra booleana conocidos por leyes de De Morgan. Escritos en el álgebra de conjuntos afirman:

$(a \cup b)' = a' \cap b'$
$(a \cap b)' = a \cup b'$

En el cálculo proposicional tienen el siguiente aspecto:
$\sim (avb) \equiv \sim a \bullet \sim b$
$\sim (a \bullet b) \equiv \sim av \sim b$

Si el lector sustituye *a* y *b* por cualesquiera dos divisores de 30, e interpreta los signos operatorios como ya se ha explicado, comprobará que siguen cumpliéndose las leyes de De Morgan. No es casualidad que estas leyes formen par; por el contrario, sirven perfectamente para ilustrar el famoso principio de dualidad del álgebra de Boole: si en cualquier enunciado booleano se cambian todos los signos de unión que en él figuren por signos de intersección, y éstos por aquéllos, intercambiando al mismo tiempo los conjuntos nulo y universal e invirtiendo el sentido de los signos de inclusión, el resultado seguirá siendo una ley válida. Además, tales cambios pueden efectuarse en todos los pasos de la demostración de una ley, y con ello quedará demostrada al mismo tiempo la ley dual. (Hay en geometría proyectiva un principio de dualidad igualmente bello, relativo al intercambio de puntos y rectas.)
También los números 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210 (que son los 16 divisores de 210) forman un álgebra booleana con la interpretación correspondiente, aunque ahora, claro está, el elemento universal es 210, y el complementario de *a* es 210/*a*. ¿Sabrá el lector descubrir un método sencillo para engendrar sistemas de 2n números, siendo *n* un entero positivo cualquiera que formen álgebras booleanas de este tipo particular?

Soluciones

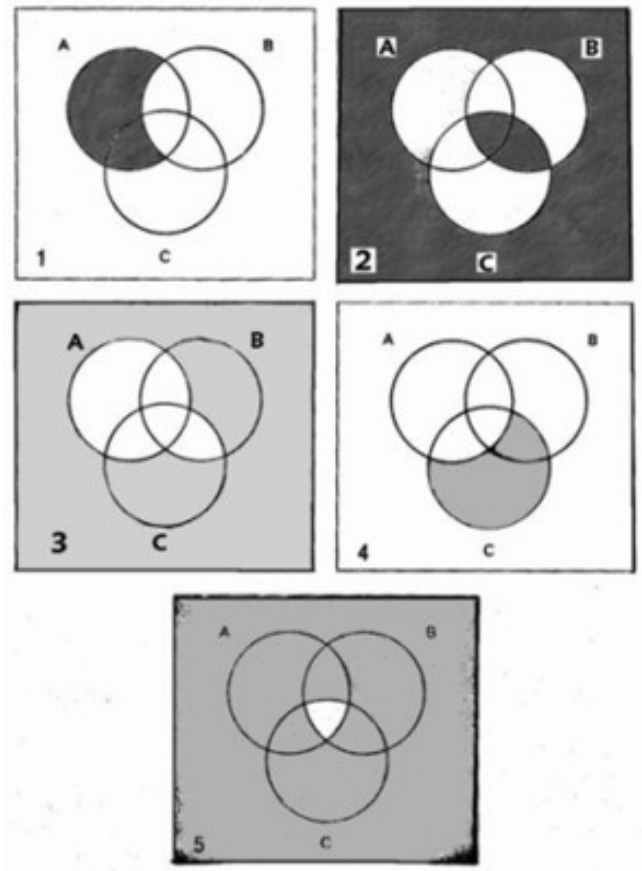


Figura 46. Solución del problema de los martinis, con diagramas de Venn

Tres círculos de Venn, sombreados como en la Figura 46, permiten resolver el problema relativo a los tres amigos que almuerzan juntos. Cada uno de los cuatro primeros diagramas ha sido sombreado de forma que exprese una de las cuatro premisas del problema. Al superponerlos y formar el último diagrama vemos que si las cuatro premisas son verdaderas, la única posible combinación de valores de verdad es *a; b, ~ c*, es decir, *a* verdadera, *b* verdadera y *c* falsa. Puesto que estamos identificando «verdadero» con pedir un martini, resulta que Antonio y Benito toman siempre martini, mientras que Carlos nunca lo toma.

El método de engendrar 2n enteros que formen álgebra booleana fue descrito por Francis D. Parker en *The American Mathernatical Monthly* de marzo de 1960, página 268. Tomemos un conjunto cualquiera de números primos distintos, por ejemplo, 2, 3 y 5. Anotemos ahora los productos de todos los subconjuntos de estos tres números. Al subconjunto vacío le asociaremos como producto el número 1. Resulta así el conjunto de productos 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, es decir, el primero de los

ejemplos de este tipo ya explicados. De forma análoga, los cuatro números primos 2, 3, 5, 7 generan el segundo de esos ejemplos, que constaba de los 24 = 16 divisores de 210. La demostración de que todos estos conjuntos dan efectivamente álgebras de Boole puede verse en *Boolean Algebra*, de R. L. Goodstein, en la solución del problema nº 10.

Capítulo 9
¿Pueden pensar las máquinas?

Hubo un tiempo en que tuvo que parecer sumamente improbable que las máquinas pudieran aprender a dar cuenta de sus necesidades mediante sonidos, aún yendo éstos dirigidos a oídos humanos. ¿No será lícito, entonces, concebir que pueda llegar el día en que ya no sean necesarios nuestros oídos, sino que la audición se produzca gracias a la delicada construcción de la máquina, el día en que su lenguaje haya trascendido del grito animal a un discurso tan intrincado como el nuestro?

Samuel Bufier, Erewhon

Alan Mathison Turing, matemático inglés fallecido en 1954 cuando sólo contaba 42 años, ha sido, entre los pioneros de las ciencias del cómputo, uno de los más creativos. En nuestros días se le conoce sobre todo por la idea de una máquina hipotética, llamada «máquina de Turing». Echaremos aquí una rápida ojeada a estas máquinas y nos detendremos luego en una de las ideas menos conocidas de Turing, el juego de Turing, que conduce a profundas controversias de carácter filosófico, hoy todavía por resolver.

Una máquina de Turing es una «caja negra» (una máquina cuyo mecanismo no se especifica) capaz de ir inspeccionando una cinta ilimitada dividida en casillas. La caja puede tomar un número finito cualquiera de estados. En la cinta hay una porción finita cuyas casillas no están en blanco; cada una de éstas porta un único símbolo tomado de entre una colección finita prefijada. Al inspeccionar una casilla, la caja puede dejar intacto el símbolo que contenga; puede borrarlo; puede borrarlo

e imprimir en su lugar otro símbolo; o puede imprimir un símbolo en una casilla vacía. La cinta puede entonces desplazarse una casilla hacia la derecha o la izquierda, o permanecer quieta; por su parte, la caja puede persistir en su estado o saltar a un estado diferente.

La conducta de la máquina en cada una de las combinaciones de símbolo y estado queda determinada por una tabla de reglas. La tabla define totalmente la máquina de Turing concreta de que se trate. Existe una infinidad numerable (es decir, de cardinal aleph-sub-cero) de posibles máquinas de Turing, cada una diseñada para una tarea específica; y la estructura de la máquina puede diferir mucho en sus símbolos, estados y reglas, según la tarea a ejecutar.

Un buen procedimiento para captar la esencia de las máquinas de Turing consiste en construir una, aunque sea trivial [*véase la Figura 47*].

Figura 47. Máquina de Turing capaz de efectuar adiciones

En la cinta de papel vemos ocho casillas marcadas 1111 + 111, que denotan la suma de 4 más 3 en el sistema «unario», donde para expresar el entero *n* se escriben *n* palotes, *n* «unos», por ejemplo. Para construir la máquina recortaremos

en cartulina un cuadrado no muy grande (la caja negra) y en él dos rendijas, por donde se hará deslizar la cinta como se muestra en la figura. Se ajusta la cinta de forma que sea visible el primer 1. La tabla de instrucciones que acompaña la ilustración enumera todas las instrucciones necesarias.

Empecemos suponiendo que la máquina se encuentra en el estado A. Consultamos en la tabla la instrucción correspondiente al símbolo 1 y el estado A, y ejecutamos lo que dice: borrar el 1, desplazar la cinta un cuadro hacia la izquierda (para poder explorar la casilla adyacente a la derecha) y suponer que la máquina ha adoptado el estado B. Se prosigue de esta forma hasta que la tabla ordene detenernos.

Siguiendo correctamente las instrucciones, la máquina borrará el primer 1, y va desplazando la cinta hacia la izquierda, casilla por casilla, hasta alcanzar el signo «más». Una vez alcanzado, cambiará el + por un 1, y se detendrá. El contenido de la cinta será entonces 1111111, es decir, 7. Como es evidente, las sencillas reglas anteriores dejan programado el dispositivo para sumar cualquier par de números enteros en notación unaria, por grandes que sean.

No cabe duda de que como procedimiento de sumación este método es bien fastidioso; pero debemos recordar que el objetivo de Turing era reducir el cálculo mecánico a un esquema abstracto sencillo, que facilitara así el análisis de toda clase de espinosos problemas teóricos, como, por ejemplo, qué puede ser computado y qué no. Turing demostró que su dispositivo ideal puede ser programado para realizar, en su desmañado estilo, cualquier cosa que pueda ejecutar el más potente ordenador electrónico. Lo mismo que cualquier ordenador y que el cerebro humano la máquina de Turing está limitada por el hecho de que ciertos cálculos (como los necesarios para hallar el valor de «pi») exigen infinito número de pasos, y por otro lado, debido a que ciertos problemas son intrínsecamente insolubles, es decir, se sabe que no puede existir ningún algoritmo, ningún proceso perfectamente detallado, que permita resolverlos. Una «máquina universal de Turing» es capaz de llevar a cabo cualquier tarea que pueda efectuar una máquina de Turing especialmente concebida para esa tarea. En breve, la máquina universal es capaz de computar todo lo que sea computable.

En 1950, la revista inglesa *Mind*, dedicada a temas filosóficos, publicó un artículo de Turing, «Computing Machinery and Intelligence». Desde aquella fecha, el artículo ha

sido recogido en diversas antologías, entre ellas, en *The World of Mathematics* de James R. Newman (hay traducción española: *Sigma, El mundo de las matemáticas*, Ed. Grijalbo). Allí, Turing empezaba diciendo: «Me propongo examinar la cuestión ¿Pueden pensar las máquinas?». Así planteada, decía Turing, la pregunta era demasiado vaga para poder darle alguna respuesta significativa. Turing proponía entonces otra cuestión mucho más restringida, relacionada con ésta: ¿Es posible enseñar a un ordenador a ganar el «juego de imitación», hoy comúnmente conocido por juego de Turing o test de Turing?

Turing inspiró su test en un juego de salón. Un hombre y una mujer se encierran en distintas habitaciones. Un interrogador, da igual hombre que mujer, va haciéndoles preguntas a los jugadores. Las preguntas son formuladas a través de un intermediario; el correveidile trae las respuestas, de vuelta, escritas a máquina. Cada jugador se propone convencer al preguntón que él o ella es, en realidad, la mujer, pongamos por ejemplo. El interrogador gana el juego cuando atina quien está diciendo la verdad.

Supongamos, decía Turing, que uno de los jugadores sea sustituido por una máquina capaz de aprender, a la que hemos enseñado a conversar en un lenguaje natural. ¿Es posible que una máquina así logre engañar al inquiridor, si tanto la máquina como su compañero humano se esforzasen al máximo en convencer al interrogador de que él, ella o ello son verdaderamente humanos?

El significado de «engañar» queda desdibujado por varias imprecisiones. ¿Cuánto tiempo puede durar el interrogatorio? ¿Cuán inteligente es el interrogador? ¿Cuán inteligente es la persona que compite con la máquina? Un ordenador moderno podría superar el test de Turing si el interrogador fuese un niño que tan sólo pudiera formular unas cuantas preguntas. Es verosímil que no se produzcan en este campo avances espectaculares, como probablemente tampoco se produjeron en la evolución del intelecto humano. Las máquinas conversadoras podrían ir mejorando gradualmente, resistiendo diálogos más y más largos frente a interrogadores cada vez más perspicaces. Quizá llegue un día en que tan sólo un potentísimo ordenador electrónico sea capaz de discriminar sistemática y acertadamente las personas de las máquinas. El propio Turing hizo una predicción cautelosa. Hacia el año 2000, escribió, los ordenadores tendrán la facilidad de palabra suficiente como para

despistar a un «interrogador corriente» alrededor del 30 por 100 de las veces al cabo de «unos cinco minutos» de conversación. Turing imaginó un diálogo que pudiera ser típico:

P. Vamos a ver, componga, un soneto dedicado a sus padres.
R. No cuente conmigo para eso. Nunca he sabido escribir poesía.
P. Sume 34.957 y 70.764.
R. (Pausa de unos 30 segundos antes de contestar). 105.621.
P. ¿Sabe jugar al ajedrez?
R. Sí.
P. Tengo mi rey en 1R. No tengo más piezas. Usted tiene su rey en 6R, una torre en 1T, y nada más. Juega usted. ¿Qué debe hacer?
R. (Tras pausa de unos 15 segundos). T8T. Mate.

Existen ya muchos programas que permiten que un ordenador simule conversaciones en lenguaje natural. Joseph Weizenbaurn, ingeniero eléctrico del M.I.T., ha preparado uno que él ha bautizado «Eliza» en recuerdo de la Eliza Doolittle del *Pygmalion* de Shaw. El *New York Times* (15 de junio de 1968) reseñaba el siguiente diálogo mecanográfico entre una joven y un ordenador I.B.M. 7094, que suplantaba a un hipotético psicoanalista:

Mujer: Todos los hombres son iguales.
Ordenador: ¿En qué aspecto?
M. En que siempre están dándonos la lata con una cosa u otra.
O. ¿Puede darme algún ejemplo concreto?
M. Bueno, para que vea, mi novio me ha hecho venir aquí.
O. ¿Su novio la ha hecho venir aquí?
M. Sí. Dice que estoy siempre deprimida.
O. Lamento mucho que esté usted deprimida.
M. Pero es cierto. No soy feliz.
O. ¿Cree usted que venir aquí le servirá de ayuda?
M. Bueno, lo que está claro es que necesito que me ayuden.
O. ¿De qué cree usted que le serviría que le ayudasen?
M. Quizás... para llevarme mejor con mi madre.

O. Háble me de su familia.
M. Mi madre se ocupa mucho de mí.
O. ¿Hay alguien más en su familia que se ocupe de usted?
M. También mi padre.
O. ¿Su padre?
M. Hay cosas en las que usted se parece a mi padre.
O. ¿Qué parecido me encuentra usted?
M. Usted no es nada agresivo, pero tengo la impresión de que no quiere que yo me dé cuenta.
O. ¿Por qué piensa usted que no soy agresivo?
M. Porque nunca me rebate lo que digo.

El diálogo prosigue en la misma tónica y no difiere gran cosa de la conversación entre un paciente y un terapeuta no directivo. El programa no era tan siquiera un programa «autodidacta». Weizenbaum admitió de buena gana que el ordenador no «comprendía» nada de lo que allí se decía. Desde luego, no podría superar el test de Turing. Supongamos, empero, que hacia el año 2000 haya ordenadores capaces de afrontar el juego de Turing con tanto éxito como ahora son capaces de jugar a las damas o al ajedrez. ¿Qué revelaría eso si es que revela algo acerca de la naturaleza de la «mente» de la máquina?

Los lectores de la famosa novela *2001, una odisea del espacio*, de Arthur C. Clarke, recordarán que en ella se dice que HAL, ordenador parlante de la nave espacial, «piensa», pues es capaz de «superar fácilmente el test de Turing». (Las siglas HAL provienen de computador ***h***eurísticamente programado y ***al***gorítmico; pero seguramente, cuando Clarke eligió este nombre se proponía hacerle al lector un juego de palabras más ingenioso. ¿Sabrá descubrirlo usted?) ¿Podemos decir que HAL piensa, o tan sólo remeda al pensamiento? Turing opina que, llegado el momento en que la habilidad conversatoria de los ordenadores les permitieran superar su test, nadie dudaría en admitir que son capaces de pensar.

Inmediatamente surgen docenas de cuestiones enormemente embrolladas. ¿Podría sufrir la timidez un ordenador semejante? ¿Podría experimentar emociones? ¿Y tener sentido del humor? En pocas palabras, ¿tendríamos que considerarlo

«persona»? ¿O tan sólo es una máquina muerta, que ha sido construida para imitar la conducta de las personas? Recordemos que L. Frank Baum ya escribió sobre el robot TikTok, un robot que «piensa, habla, actúa y hace todo, excepto vivir».

Qué duda cabe, que si un ordenador saliera triunfante de los tests de Turing, lo único que se habría demostrado es que los ordenadores pueden imitar el discurso de los humanos con perfección suficiente como para superar tales pruebas. Pensemos por un momento que alguien, en la Edad Media, hubiera pensado en someter a los tulipanes a la siguiente prueba de autenticidad: ¿Será posible producir un tulipán de orfebrería, tan perfecto que a simple vista sea indistinguible de los del jardín? Hoy se fabrican tulipanes artificiales capaces de superar esta prueba de «autenticidad». Pero eso nada nos dice sobre la capacidad de los químicos para sintetizar compuestos orgánicos, ni nos garantiza que nadie sepa construir un tulipán capaz de crecer como los tulipanes de jardín. Al igual que hoy nos ocurre que al tocar lo que pensamos que es una flor exclamamos con sorpresa « ¡Anda, si es artificial!, no parece en absoluto impensable que mañana, tras sostener una larga conversación con lo que pensamos que es una persona, al abrir una puerta descubramos atónitos que habíamos estado charlando con un ordenador.

Keith Gunderson, en un importante artículo de 1.964 donde criticaba a Turing por haber cargado excesivamente las tintas en la importancia de su test, expresaba así su punto de vista: «Al fin y al cabo, la perforadora de vapor pudo más que John Henry en la tarea de excavar túneles de ferrocarril. Pero eso no demostró que la máquina perforadora tuviera músculos; por el contrario, demostró que para excavar túneles de ferrocarril no se precisa de músculos.»

El test de Turing experimentó un giro curioso durante una conferencia de Michael Scriven, más tarde recogida con el titulo «The Compleat Robot: A Prolegomena to Androidology», en *Dimensions of Mind*, recopilado por Sidney Hook. Scriven concedía que la habilidad dialéctica no demostraba que el ordenador poseyera otros atributos de la «persona». Supongamos, empero, que uno de estos computadores parlantes llegase a aprender el significado de la palabra «verdad» (por ejemplo, en el sentido de correspondencia que Alfred Tarski ha definido con precisión) y que a continuación se le programa para que nunca pueda mentir. «De esta forma, el robot queda incapacitado para ejercer de ayuda de cámara, de redactor publicitario o de

político, pero en cambio puede prestarnos ahora nuevos servicios.» Ahora podemos preguntarle si tiene conciencia de existir, si tiene emociones, si ciertos chistes le parecen graciosos, si actúa por propia voluntad, si le gusta la poesía de Keats. Y otras semejantes, en la confianza de que nos va a dar respuestas correctas.

Cabe la posibilidad de que la «máquina de Scriven» (como la ha bautizado uno de los varios filósofos que en otros capítulos de la antología de Hook comentan el articulo de Scriven) respondiera negativamente a todo lo anterior. Pero si diera respuestas afirmativas, arguye Scriven, tendríamos tanta justificación para creerlo como para creer a un ser humano, y ninguna para no admitirlo como «persona».

No existe acuerdo entre los filósofos con respecto a los razonamientos de Turing y Scriven. En una nota breve titulada «The Supercomputer as Liar», Scriven replicaba a algunos de sus críticos. Por otra parte, Mortimer J. Adler, en su libro *The Difference of Man and the Difference It Makes*, considera que el criterio de Turing es «cosa de todo o nada», y que el éxito y el fracaso en construir computadoras capaces de superarlo servirán, respectivamente, para debilitar o reforzar la creencia de que el hombre es radicalmente diferente de cualquier máquina o animal infrahumano.

La existencia de máquinas capaces de dialogar, ¿lograría verdaderamente cambiar las creencias de los humanos con respecto al carácter singular de su naturaleza? No cuesta demasiado imaginar uno de nuestros programas humorísticos de televisión dentro de 50 años. Los invitados al programa improvisan chistes y juegos de palabras en compañía de un robot presentador en cuya memoria se han atiborrado uno o dos millones de chascarrillos, y al que humoristas humanos han logrado infundir el arte de la pausa en la conversación intencionada. Por mi parte, dudo mucho que nadie admitiera que el robot «tiene sentido del humor», como ningún jugador derrotado por un autómata ajedrecístico estaría dispuesto a admitir que se ha enfrentado a una máquina de naturaleza radicalmente distinta a la del autómata que juega al «tres en raya». Después de todo, las reglas de la semántica y sintaxis no son tan radicalmente diferentes de las del ajedrez.

En cualquier caso, el debate continúa, embrollado por prejuicios metafísicos y religiosos además de problemas lingüísticos muy complejos. Todos los clásicos enigmas sobre el cuerpo y el alma, sobre la naturaleza de la persona, vuelven a ser

de actualidad, sólo que ahora planteados con nueva terminología. Resulta difícil predecir qué principios sobrevivirán y cuáles serán pisoteados, ni cómo, al ir perfeccionándose los robots del futuro, se verán influidas las cuestiones filosóficas fundamentales hoy en plena controversia.

Hace 100 años, cuando Samuel Butler explicaba en *Erewhon* por qué los erewhonianos decidieron destruir sus máquinas, temerosos de verlas convertidas de siervas en señoras, la advertencia de Butler fue considerada pura sátira, traída por los pelos. Hoy, la lectura de esos mismos capítulos impresiona por su carácter profético. «Las máquinas tienen hoy un nivel de conciencia muy bajo», escribía Butler, «mas no por eso tenemos seguridad alguna de cual será el definitivo desarrollo de la conciencia mecánica. Un molusco tampoco ofrece un elevado nivel de consciencia. Reflexionemos, empero, sobre el extraordinario desarrollo de las máquinas en estos últimos siglos, y cuán lentamente, en cambio, están avanzando los reinos animal y vegetal. En comparación con el tiempo pasado, las máquinas de más alta organización no son, por así decirlo, cosa de ayer, sino de los cinco últimos minutos».

Soluciones

Si tomamos en el alfabeto la siguiente a cada una de las letras que componen el nombre HAL resulta IBM. En el filme, el logotipo de IBM es visible en los terminales de visualización de HAL, y todo el mundo supuso que Clarke había desplazado las letras intencionadamente. Por su parte, Clarke me ha asegurado que tal hecho es completamente accidental, y que él fue el primer sorprendido al enterarse.

Capítulo 10
Números cíclicos

El número 142.857, que los numerólogos y aficionados a la aritmética recreativa sin duda habrán reconocido en el acto, es uno de los enteros más curiosos. Pues, aparte del número 1, donde la propiedad es trivial, es el mínimo de los «números cíclicos». Un número cíclico es un entero de *n* cifras que presenta la insólita característica de que al multiplicarlo por cualquiera de los números comprendidos entre 1 y *n*, ambos inclusive, el producto tiene *n* cifras, las mismas que el multiplicando primitivo, y en el mismo orden cíclico. Imaginemos un collar, cuyas cuentas fuesen los números 142.857. Podemos abrir el collar por seis sitios; al estirarlo formaremos seis números de seis cifras, que son las seis permutaciones cíclicas del número escrito:

1 x 142.857 = 142.857
2 x 142.857 = 285.714
3 x 142.857 = 428.571
4 x 142.857 = 571.428
5 x 142.857 = 714.285
6 x 142.857 = 857.142

La naturaleza cíclica de estos seis productos ha venido intrigando desde hace mucho a los ilusionistas. Muchos finos trucos de predicción matemática se inspiran en ellos. He aquí uno: preparamos una baraja francesa, de 52 naipes, empezando por separar las nueve picas cuyo valor se expresa con una sola cifra. Estas cartas son colocadas en la parte inferior del mazo, de manera que su orden, de abajo a arriba, sea 142857; a continuación van las tres cartas restantes, en orden cualquiera. Anunciamos que el resultado de nuestro acto mágico será el número 142.857, que aparecerá escrito con grandes cifras en una tira de papel metida en un sobre cerrado. Cortamos una tira de papel de longitud doble que la del sobre que haya de contenerla, escribimos en ella las cifras ya dichas y pegamos sus extremos,

formando así una faja circular. Después la aplanamos, como muestra la Figura 48, y así plegada la metemos en el sobre, que cerramos y pegamos.
Como es obvio, tenemos que saber de memoria el número 142.857 y también recordar que sus tres primeras cifras están en la mitad superior de la banda, y las otras tres, en la mitad inferior. Más tarde abriremos el sobre, cortándolo con unas tijeras por uno de los cuatro lugares marcados A, B, C, D. Si se corta por A o por D, córtese también la extremidad de la banda de papel, con lo cual, al extraerla, quedará una tira rectangular que mostrará el número 142.857 o bien el 857.142.

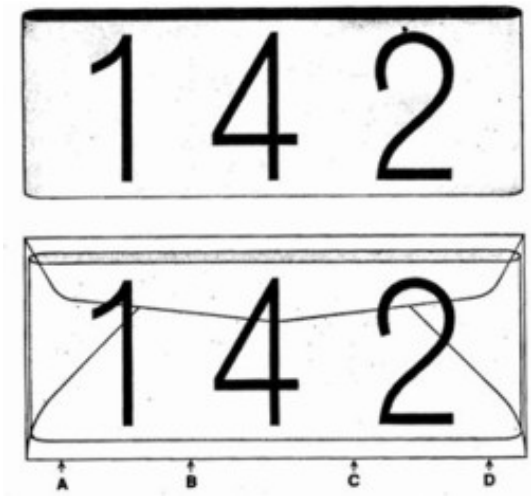


Figura 48. Con esta banda sin fin (arriba), encerrada en un sobre (abajo) podemos realizar un truco de predicción

Las otras cuatro permutaciones cíclicas se obtienen abriendo el sobre por B o C, como se explica. Hay que empezar cortando solamente el sobre, por debajo de la tira de papel; pero conforme avanza el corte, hay que tener cuidado para introducir la punta de las tijeras por medio de la banda, cortando así solamente la parte superior de la cinta de papel y el anverso del sobre. Así abrimos una rendija, por donde podremos extraer una tira de papel que portará uno de los números 428.571 ó 285.714. Para obtener las otras dos permutaciones basta proceder de igual manera por el reverso del sobre. La idea de cortar el sobre y extraer de él una tira de papel que exhiba una de las seis permutaciones cíclicas de 142.857 está inspirada en un sistema inventado por Samuel Schwartz, un abogado neoyorquino, ilusionista aficionado. Schwartz se vale de un sobre comercial, de los que muestran

una ventana transparente, por la cual los espectadores pueden ir viendo las cifras; además, su forma de preparar el mazo es ligeramente distinta, pero su método es, en esencia, idéntico al explicado.

Al empezar el truco se le entrega a uno de los espectadores el sobre que contiene nuestra predicción. Le damos a otra persona el mazo ya preparado, y le pedimos que lo baraje a fondo, «peinándolo» dos veces. (Es decir, el mazo se divide en dos partes sensiblemente iguales, y las cartas se mezclan dejándolas escurrir de los pulgares.) El doble peinado hará que las nueve cartas queden repartidas por el interior de la baraja, haciéndolas subir dentro del mazo, pero sin modificar el orden de las picas. Seguidamente, le explicamos al auditorio que vamos a construir un número de seis cifras sacadas al azar, y que para ello volveremos el mazo boca arriba y tomaremos las seis primeras picas cuyo valor sea de una sola cifra. Naturalmente, las cifras resultan ser 142.857. Colocamos estas cartas en hilera, sobre la mesa, y lanzamos un dado para tener también un multiplicador sacado al azar, de 1 a 6. Todavía mejor: podemos darle a un espectador un dado imaginario, pedirle que lo «lance» y nos diga la puntuación que «ve» en su cara superior. Se multiplica 142.857 por el número que nos diga. Se abre entonces el sobre por el lugar oportuno (para saberlo, se multiplica la cifra que nos digan por 7 y se toma la cifra de unidades del producto), y se saca a la vista la tira de papel, para dejar de manifiesto la exactitud de nuestra predicción.

El número 142.857 interviene en otros muchos trucos de ilusionismo. Pueden verse algunas referencias en la bibliografía, al final del libro. Todos ellos, empero, tienen el defecto de que los espectadores pueden acabar dándose cuenta de que en la predicción siempre se repiten las cifras de 142.857. Por otra parte, este número es ya muy conocido. Una manera de evitar esta dificultad consiste en valerse no de 142.857, sino del cociente resultante de dividirlo entre alguno de sus factores. Por ejemplo, 142.857/3 = 47.619. Ahora, en lugar de hacer multiplicar 47.619 por 1, 2, 3, 4, 5 ó 6, como antes, lo haremos multiplicar por alguno de los seis primeros múltiplos de 3. El resultado, desde luego, será nuevamente permutación cíclica de 142.857. Podemos usar también 142.857/9 = 15.873 y hacer multiplicar este último por cualquiera de los seis primeros múltiplos de 9; o bien, tomar 142.857/11 = 12.987 y hacerlo multiplicar por 11, 22, 33, 44, 55 ó 66... y así sucesivamente.

Hace muchos siglos, cuando los matemáticos cayeron en la cuenta del carácter cíclico de 142.857, empezaron a buscar otros números más grandes que tuvieran esta misma antojadiza propiedad. Los primeros trabajos encaminados a este fin pueden verse, resumidos, en el primer volumen de *History of Theory of Numbers*, de Leonard Eugene Dickson, Capítulo 6; desde los tiempos de la primera edición del Dickson, en 1919, se han escrito docenas de artículos dedicados al tema. Resulta que todos los números cíclicos son los periodos (que algunos llaman repetendos, es decir, el bloque mínimo de cifras decimales que van repitiéndose sistemática e indefinidamente) de la expresión decimal de las fracciones recíprocas de ciertos números primos. La fracción recíproca de 7, esto es, 1/7, genera el decimal ilimitado 0,142 857 142 857 142 857... Observemos que el número de cifras del período es de una menos que 7, denominador de la fracción generatriz. Tenemos así un procedimiento para descubrir otros números cíclicos mayores. En el caso de 1/*p*, siendo *p* un número primo, si se produjese un decimal periódico cuyo período estuviera compuesto por *p*, 1 cifras, tal período sería número cíclico. El mínimo número primo siguiente que genera números así es 17. Su período es el cíclico 0, 588 235 294 117 647, que consta de 16 cifras. Multiplicado este número por cualquier otro comprendido entre 1 y 16, ambos inclusive, se reproducen en el producto los 16 dígitos anteriores, y en el mismo orden cíclico. Todos los números cíclicos engendrados por primos mayores que 7 han de empezar por uno o varios ceros. En el caso de que los utilicemos para trucos de predicción o exhibiciones de cálculo rápido, podremos prescindir de los ceros iniciales, acordándonos luego de insertarlos en los lugares oportunos del producto definitivo.

Entre los números primos menores que 100 hay exactamente nueve que generen números cíclicos, a saber, 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97. Durante el siglo pasado se descubrieron otros muchos números cíclicos, de longitudes muy superiores. William Shanks, famoso por haber calculado las primeras 707 cifras decimales de π (cometiendo un error en la de lugar 528, y sucesivas), descubrió un número cíclico generado por 1/17.389, y determinó (correctamente) sus 17.388 cifras.

Ninguna fracción con denominador *d* puede tener período formado por más de *d* - 1 cifras. Para lograr estos períodos de longitud máxima es condición necesaria que *d* sea primo. Resulta así que los números cíclicos equivalen a períodos de longitud

máxima de recíprocos de números enteros. Es fácil comprender por qué la máxima longitud del período es *d* - 1. Al ir dividiendo 1,000... entre *d*, en cada etapa del proceso de división hay solamente *d*, 1 restos posibles (distintos de 0); tan pronto se repita un resto comenzarán a repetirse las cifras del cociente, y aparecerá el período. Por consiguiente, ninguna fracción con denominador *d* puede tener períodos de más de d - 1 cifras. También es fácil ver el motivo de que estos períodos de longitud máxima sean cíclicos. Fijémonos, por ejemplo, en 8/17. Puesto que al dividir 1/17 se presentan ya todos los restos posibles, al dividir 8 entre 17 no hacemos más que comenzar el proceso cíclico en lugar diferente. Es seguro entonces que obtendremos en el periodo del nuevo número decimal las mismas cifras que antes, y en el mismo orden cíclico. Al multiplicar por 8 el número cíclico generado por 1/17 no hacemos más que hallar el período de 8/17; por lo tanto, el producto tendrá que ser permutación cíclica de los mismos 16 dígitos que forman el periodo de 1/17.

No se dispone de ninguna fórmula explícita no recursiva, capaz de generar automáticamente todos los números primos cuyas fracciones recíprocas tengan períodos de longitud máxima (y así pues, generar todos los números cíclicos), pero sí hay muchas mañas que simplifican grandemente la tarea de identificar tales primos y de preparar programas de ordenador que puedan determinarlos. No se sabe todavía si existirán infinitos primos capaces de generar números cíclicos, pero tal conjetura parece bastante verosímil. En la valiosa tabla de períodos de los recíprocos de los números primos, preparada por Samuel Yates, y que incluye todos los números primos menores o iguales que 1.370.471 (véase la bibliografía), alrededor de las tres octavas partes de los números primos allí estudiados son de nuestro tipo. La proporción permanece sensiblemente constante al ir tomando muestras de distintos segmentos de la tabla, por lo que la conjetura de validez para todos los números primos no parece descabellada.

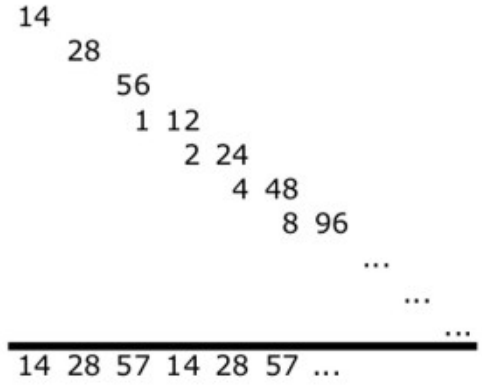
Al multiplicar un número cíclico por el primo que lo engendra, el producto es siempre una hilera de nueves. Por ejemplo, 7 por 142.857 es 999.999. Disponemos entonces de otro método para buscar números cíclicos: se toma el número *p*, primo, y se va dividiendo una hilera de nueves entre *p*, hasta lograr resto 0. En el caso de que el cociente tenga *p* - 1 cifras, resultará ser cíclico. Todavía más inesperada es la

propiedad de que al escindir por la mitad el bloque de cifras que componen el número cíclico (o cualquiera de sus permutaciones circulares) los dos números resultantes dan al sumarlos una hilera de 9s. Por ejemplo, 142 + 857 = 999. Veamos otro ejemplo. Separamos en dos bloques el número cíclico engendrado por 1/17, y sumamos las mitades:

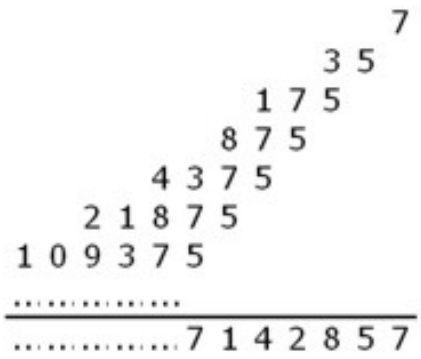
05.882.352
94.117.647
99.999.999

Tan sorprendente propiedad es caso particular del «teorema de Midy», atribuido por Dickson a E. Midy, quien lo dio a conocer en Francia, en 1836. El teorema de Midy enuncia que si el periodo de la expresión decimal de *a/p* (siendo *p* número primo) consta de número par de dígitos, entonces, la suma de los dos números obtenidos al escindir el periodo en dos bloques iguales será una hilera de nueves. Hay números primos, el 11, por ejemplo, cuyos períodos tienen longitud par, no son cíclicos, y cumplen la propiedad de los nueves. Hay otros números primos, como el 3 y el 31, cuyas fracciones recíprocas tienen períodos de longitud impar. Ahora bien, todos los números cíclicos son de longitud par, y por este motivo el teorema de Midy se cumplirá en todos ellos. Es propiedad que conviene recordar, porque al tantear con algún primo para ver si genera un número cíclico por el método de la división será suficiente hacerla hasta la mitad. Las cifras que faltan pueden obtenerse rápidamente, sin más que tomar los complementos a 9 de las ya obtenidas. Evidentemente, resulta también del teorema de Midy que todos los números cíclicos habrán de ser múltiplos de 9, pues está claro que lo es la suma de sus cifras. Los lectores a quienes interese una demostración elemental del teorema de Midy pueden consultar *The Enjoyment of Mathematics*, por Hans Rademacher y Otto Toeplitz (*Princeton University Press*, 1957), pp. 158-60 [Hay traducción española, *Números y figuras*, Alianza Editorial, Madrid, 1970]. Puede verse otra demostración, debida a W. G. Leavitt, «A Theorem on Repeating Decimals», en *The American Mathematical Monthly*, junio-julio de 1967, pp. 669-73.

Los números cíclicos tienen otras muchas extrañas propiedades; quizá el lector pueda tener el placer de descubrir algunas por sí mismo. Tan sólo mencionaré otra más. Todo número cíclico puede ser engendrado de multitud de formas como suma de una progresión geométrica infinita, escrita en diagonal. Por ejemplo, tomemos 14 como valor inicial, y vayamos duplicándolo en cada paso, escribiendo los números resultantes de forma que sobresalgan cada vez dos cifras hacia la derecha:



En la suma va repitiéndose el número cíclico mínimo (no trivial). Otro procedimiento para obtener el mismo número cíclico es empezar por 7 e ir moviéndose uniformemente hacia la izquierda, multiplicando en cada paso por 5 el número anterior, y conservando las cantidades obtenidas uniformemente ceñidas a la diagonal por su lado derecho:



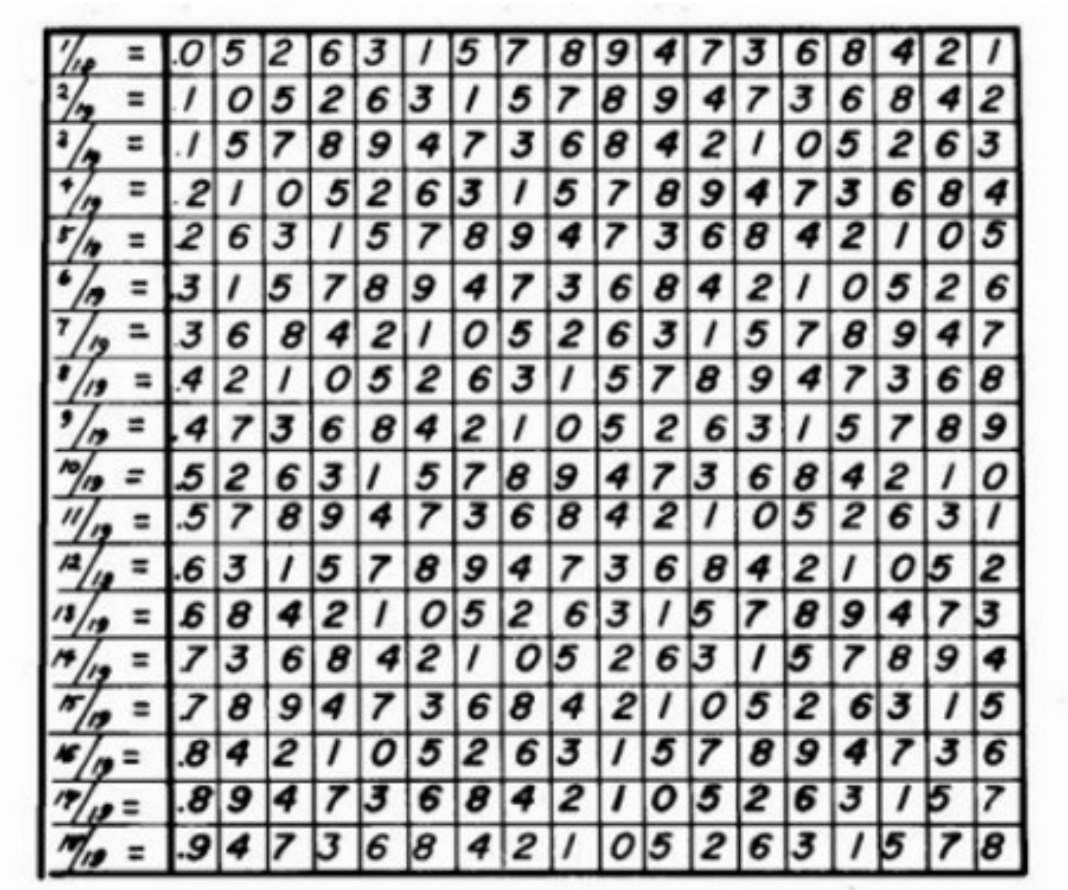
Con el mismo procedimiento, pero usando esta vez la progresión geométrica de razón 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... se obtendrá el periodo de 1/19, que es el tercero de

los números cíclicos: 052.631.578.947.368.421. En cambio, la progresión geométrica de razón 3 : 1, 01, 03, 09, 27, 81... escrita diagonalmente hacia la derecha en sentido descendente, con cada número sobresaliendo dos cifras más que su precedente, da una suma que va repitiendo el período de 1/97, el mayor de los números cíclicos generados por números primos menores que 100.

Terminaré esta breve exposición, donde tan sólo se han tocado una parte mínima de las propiedades de los números cíclicos, preguntando al lector qué propiedades de carácter cíclico puede descubrir en el período de 1/13. Este, que es 076.923, no es verdaderamente cíclico, aunque podríamos llamarlo cíclico de orden 2. La solución abrirá nuevos campos, íntimamente relacionados con los cíclicos de orden 1, que son los que hemos comentado.

Apéndice

John W. Ward me informó sobre el cuadrado mágico perfecto que vemos en la *Figura 49*. Este cuadrado se encuentra en la página 176 de *Magic Squares and Cubes*, una obra de W. S. Andrews que data de 1917, hoy disponible en *Dover Paperbacks*. El cuadrado se basa en el número cíclico generado al desarrollar la fracción 1/19. Todas las filas, columnas y diagonales principales dan suma 81.



1/19 =	.0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
2/19 =	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2
3/19 =	.1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3
4/19 =	.2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
5/19 =	.2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
6/19 =	.3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6
7/19 =	.3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7
8/19 =	.4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8
9/19 =	.4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9
10/19 =	.5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0
11/19 =	.5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1
12/19 =	.6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2
13/19 =	.6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3
14/19 =	.7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4
15/19 =	.7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5
16/19 =	.8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6
17/19 =	.8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7
18/19 =	.9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8

Figura 49. El único cuadrado mágico engendrado por un número cíclico

Casi salta a la vista que todo número cíclico dará un cuadrado mágico respecto de filas y columnas; pero Ward descubrió que el mostrado se distingue por serlo también respecto de sus dos diagonales principales. Como dice el propio Andrews, «No es fácil comprender la razón de que cada una de las diagonales mayores tenga suma 81; de todas formas, al escribir una encima de la otra vernos que cada par de números correspondientes suma 9». Ward ha demostrado también que en todos los cuadrados semiperfectos basados en números cíclicos, la suma de los números obtenidos al sumar las cifras de cada diagonal es siempre doble de la constante mágica.

Muchos lectores se preguntaron e investigaron qué sucede al multiplicar números cíclicos de orden 1 por números mayores que el número *n* de sus cifras. Se obtiene un resultado bastante grato, a saber, que en todos los casos así el producto puede acabar reduciéndose, bien a una permutación cíclica del número inicial, bien a una

serie de *n* nueves. Mostraré lo que sucede con 142.857, y quedará claro cómo generalizar la propiedad a cíclicos mayores.

Fijémonos primero en todos los multiplicadores mayores que *n* que no sean múltiplos de *n* - 1. Por ejemplo, 142.857 x 123 = 17.571.411. Separemos las seis últimas cifras, y al número que forman sumémosle el definido por los dos restantes:

571.411
17
571.428

La suma es permutación cíclica de 142.857. Veamos otro ejemplo:

142.857^2 = 20.408.122.449.

20408
122449
142857

Cuando el multiplicador sea muy grande, comenzamos desde la derecha y vamos escindiendo el número en bloques de seis cifras cada una. Por ejemplo:

142.857 x 6.430.514.712.336.
183952
040260
918644
1142856

En vista de que la suma tiene más de seis dígitos, iteramos el procedimiento;
142856
1
142857

Cuando el multiplicador del número cíclico sea múltiplo de *n* - 1 (siendo *n* el número de dígitos del cíclico), el proceso recién descrito producirá una hilera de nueves. Por ejemplo, 142.857 x 84 = 11.999.988.

999.988
11
999.999

El lector descubrirá sin ningún esfuerzo cómo aplicar el procedimiento a cíclicos de orden superior.

Ratner's Star, novela de Don DeLillo (Knopf, 1976), está salpicada de referencias a 142.857 y a sus muchas sorprendentes propiedades numerológicas. Su protagonista es Billy Twillig, un matemático prodigio de 14 años, nacido en el Bronx neoyorquino. En la novela, Billy es contratado por el Gobierno Federal, en 1979, para una misión de máximo secreto: tratar de averiguar por qué una estrella distante perteneciente a la Vía Láctea está enviando a la Tierra el número 14, 28, 57, codificado en impulsos. Resulta finalmente que tal número quiere decir... Bueno, lo mejor será que lean la novela y se enteren por sí mismos.

Soluciones

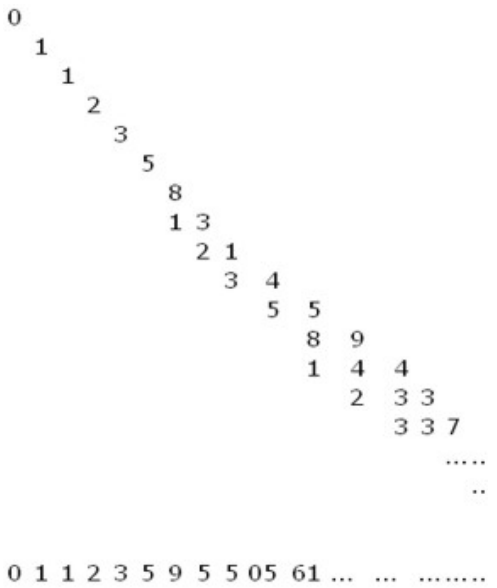
El período de 1/13, que es 076.923, no es número cíclico en el sentido definido anteriormente. Empero, podríamos decir que el número es cíclico doble, en el sentido que vamos a explicar. Al multiplicarlo por cualquiera de los números de 1 a 12, la mitad de los productos son las seis permutaciones cíclicas de 076.923; la otra mitad corresponde a las permutaciones de 153.846. Observemos que en cada uno de estos números (al igual que en 142.857, mínimo cíclico de orden 1) las dos mitades que se producen al escindir sus cifras por el centro dan suma 999. Además, todos los números mencionados pueden romperse en tres tercios que sumados dan 99 (07 + 69 + 23 = 99; 15 + 38 + 46 = 99; 14 + 28 + 57 = 99).

Cuando un número de *n* cifras, al ser multiplicado por los números de 1 a 2*n*, engendra productos que son todos permutación cíclica de uno de dos números de *n* cifras, se dirá que el número es cíclico de orden 2. Desechado el caso trivial, generado por 1/3, se observa que el mínimo número primo capaz de generar un

cíclico de orden 2 es 13. Otros números primos menores que 100, con esta misma propiedad, son 31, 43, 67, 71, 83 y 89.

No hay dificultad en definir números cíclicos de orden cualquiera. El mínimo de los primos que generan cíclicos de tercer orden es 103. El período de 1/103, al ser multiplicado por cualquier entero de 1 a 102, da tres tipos de productos; cada tipo contiene las 34 permutaciones cíclicas de un número de 34 cifras. El más pequeño de los primos que generan cíclicos de orden 4 es 53. En general, como ha hecho ver H. J. A. Dartnall, un corresponsal londinense, si la fracción recíproca de un número primo tiene período de longitud (número de cifras) igual a (p - 1)/n, el período es cíclico de orden n (siendo p el número primo). Por ejemplo, 1/37 engendra un período de tres cifras: 027. Dado que 36/3 = 12, este período es cíclico de orden 12. Los mínimos números primos que generan cíclicos de órdenes 5 a 15 son, respectivamente, 11, 79, 211, 41, 73, 281, 353, 37, 2393, 449, 3061. Observemos que los 10 productos del cíclico de orden cinco 09 (que es el periodo de 1/11) son los 10 primeros múltiplos de 9.

Existe una curiosa relación entre los números de Fibonacci y el cíclico de orden 2 engendrado por 89. Empezando por 0, escribamos la sucesión de Fibonacci en la forma diagonal que vemos abajo, ciñendo por la derecha los números de la sucesión a la diagonal



La suma es la parte decimal de la fracción recíproca de 89.

El tema de los números cíclicos de orden mayor que 1 es una espesa jungla, y la literatura dedicada a él se encuentra dispersa acá y allá, estando por hacerse una bibliografía sistemática. Idénticas observaciones valen para los números cíclicos de base distinta de 10. Cada base de numeración contiene números de este tipo; en el binario, por ejemplo, la sucesión de primos generadores de cíclicos de primer orden empieza así (en notación decimal): 3, 5, 11, 13, 19, 29...

Capítulo 11
El ajedrez extravagante y otros problemas

1. Ajedrez extravagante

Al visitar, hace poco, un club ajedrecístico imaginario tuve ocasión de observar el desarrollo de una partida entre los señores Blanco y Negro, los dos jugadores del club que más se distinguían por la extravagancia de sus partidas. Para sorpresa mía, el tablero mostraba la posición de la Figura 50.

Figura 50. Situación de las piezas tras la cuarta jugada de las negras

Pensé enseguida que cada jugador había empezado la partida sin su caballo de rey, y que las primeras en mover habían sido las negras. El señor Negro me explicó entonces que acababa de realizar su cuarta jugada, en una partida ajustada a las reglas ordinarias y, que se había desarrollado como sigue:

Blancas	**Negras**
1. C3AR	P4D
2. C5R	C3AR
3. C6AD	CR2D
4. C x C	C x C

Una hora más tarde, tras perder una partida frente a otro jugador, volví a echar un vistazo al tablero de Blanco y Negro. En su segunda partida, el tablero tenía exactamente el mismo aspecto que antes, salvo que ahora faltaban *todos* los caballos. El señor Negro, que acababa de mover una pieza negra, alzó la vista del tablero y dijo: «Acabo de realizar mí *quinta* jugada».

a) ¿Sabrá el lector construir una partida que produzca tan curiosa situación inicial, valiéndose tan sólo, claro está, de jugadas lícitas?

«Ya que estamos en ello», me dijo el señor Blanco, «he inventado un problema que tal vez podría resultarle entretenido a sus lectores. Supongamos que volcamos una caja completa de piezas en una bolsa las 16 piezas blancas y las 16 negras, que agitamos la bolsa para mezclarlas bien, y vamos después sacando las piezas al azar, de dos en dos. Si ambas son negras las colocamos en la mesa, comenzando a formar con ellas el grupo negro. Si ocurre que ambas son blancas, las ponemos en otro lugar de la mesa, iniciando así el grupo de las blancas. Finalmente, si las piezas salen de distinto color, las colocamos en la caja que las contenía inicialmente. Una vez extraídas de la bolsa la totalidad de las 32 piezas, ¿qué probabilidad hay de que el número de piezas del grupo negro sea exactamente igual al número del grupo blanco?» «Hummm...», musité. « Así, a primera vista, parece que la probabilidad debería ser bastante pequeña.» Negro y Blanco disimularon una sonrisita maliciosa, y prosiguieron su partida.

b) ¿Cuál es exactamente la probabilidad de que ambos grupos consten de igual número de piezas?

2. Una Eva charlatana

El criptaritmo que aquí presento (o alfamético, como prefieren llamarlo algunos problemistas) es muy antiguo y de origen desconocido; seguramente sea uno de los mejor construidos. Lo ofrezco aquí con la esperanza de que no sea demasiado conocido de los lectores:

$$\frac{EVE}{DID} = O, TALKTALKTALK \ldots$$[1]

Como siempre, letras iguales representan cifras iguales, entre las que puede hallarse el 0. La fracción EVE/DID ha sido ya simplificada al máximo, o sea, es irreducible. Su desarrollo decimal tiene un período de cuatro cifras. La solución del criptaritmo es única. Para dar con ella, recuérdese que el procedimiento habitual para hallar la fracción generatriz de un decimal periódico puro, cuyo período conste de *n* cifras, es tomar el bloque periódico y dividirlo por *n* nueves, simplificando después todo lo posible la fracción así obtenida.

3. Tres cuadrados

Sirviéndose tan sólo de geometría elemental (no es lícito usar ni siquiera trigonometría) hay que demostrar que el ángulo *C* de la Figura 51 es suma de los ángulos *A* y *B*.

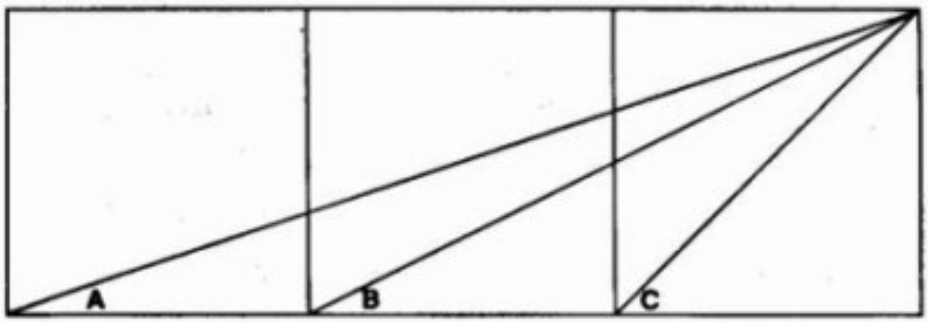


Figura 51. Demostrar que el ángulo A mas el ángulo B es igual al ángulo C

Tengo que agradecer a Lyber Katz el haberme comunicado este problema, que es de una sencillez fascinante. En una carta me explicaba que de niño fue a la escuela en Moscú, donde les propusieron el problema en 5º de Básica «para subir nota». En su carta, Katz añade que «el número de callejones sin salida a que conduce el problema es extraordinario».

---

[1] La fracción se lee «Eyeoverdid talk talk ... » que puede traducirse por «Eva se pasó en el dale que dale, dale que dale ... » (N. del T.)

4. La proposición de Pohl

Frederik Pohl, uno de los mejores escritores de ciencia ficción, ha ideado este truco, recientemente publicado en una revista de ilusionismo llamada *Epilogue*. Es probable que los expertos en informática lo resuelvan más rápidamente que los demás.

Se le pide a un espectador que dibuje en un papel una hilera de pequeños círculos, que representan otras tantas monedas. Mientras así lo hace, el mago permanece de espaldas. El espectador, al término, coloca la yema del pulgar de su mano derecha sobre la primera circunferencia de forma que con el pulgar y el resto de la mano oculte, completamente la hilera de círculos. El mago se vuelve entonces hacia él, y le apuesta a que es capaz de anotar inmediatamente en la hoja un número que indicará el número total de posibles combinaciones de caras y cruces que resultarían de lanzar cada una de las monedas. Por ejemplo, dos monedas pueden caer de cuatro formas distintas, tres monedas, de ocho, y así sucesivamente.

No hay forma de saber cuántas monedas dibujó: sin embargo, es fácil ganar la apuesta. ¿Cómo?

5. Los bloques deslizantes de Escott

Este notable y curioso rompecabezas fue ideado por Edward Brind Escott, matemático americano fallecido en 1946. (Véase la Figura 52.)

Figura 52. El rompecabezas de bloques deslizantes de Escott

El problema apareció en el número de agosto de 1938 de una revista de vida efímera, llamada *Games Digest*. No llegó a publicarse ninguna solución. El problema consiste en ir haciendo deslizar los bloques de uno en uno, manteniéndolos en contacto con el plano y sin salirse del marco rectangular, hasta que los bloques 1 y 2 hayan intercambiado sus puestos con los bloques 7 y 10. De esta forma, en la posición final los dos pares de bloques se encontrarán como muestra la figura de la derecha, estando las restantes piezas en otros lugares, no dibujados, del tablero. No es lícito hacer girar ningún bloque, aún suponiendo que hubiera espacio para ello; cada uno ha de conservar su orientación primitiva al tiempo de desplazarse hacia arriba, abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda.

Escott era un especialista en teoría de números, y publicó abundantemente en diversas revistas matemáticas. Fue profesor en diversas escuelas y facultades del Middle West, y en sus últimos años, actuario de una compañía de seguros.

6. Pesas rojas, blancas y azules

Durante estos últimos decenios se han puesto de moda los problemas de balanzas y pesadas. He aquí uno no muy conocido, inventado por Paul Curry, bien conocido entre los aficionados al ilusionismo.

Tenemos seis pesas. De ellas, un par es rojo, otro par, blanco, y el tercero azul. En cada par, una de las pesas es levemente más pesada que la otra, siendo por lo demás indistinguible de su gemela. Las tres más pesadas (una de cada color) tienen pesos idénticos, y lo mismo es cierto de las tres más livianas.

Haciendo únicamente dos pesadas con una balanza (de platillos), ¿cómo podríamos identificar en cada par la pesa liviana y la más pesada?

7. El número de los diez dígitos

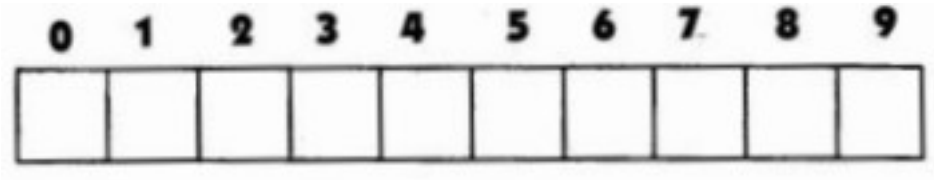


Figura 53. Un problema digital

En las 10 casillas de la Figura 53 hay que inscribir un número de 10 cifras tal que el dígito que ocupe la primera casilla (marcada con un 0) exprese el número de ceros que contiene en total el número problema, que el dígito de la casilla «1» indique cuántos unos figuran en el número, y así sucesivamente, hasta la última casilla, que dirá el número de nueves que en él intervienen. (Corno es obvio, el 0 es también un dígito.) La solución del problema es única.

8. Monedas en la bolera

Kobon Fujimura, uno de los más distinguidos creadores de problemas de ingenio del Japón, ha preparado este rompecabezas, que figura en uno de sus libros más recientes. Se colocan diez monedas iguales, de una peseta, por ejemplo, en la formación triangular con que se disponen los bolos (véase la Figura 54).

¿Cuál será el número mínimo de monedas a retirar con el fin de que con los centros de las restantes no pueda construirse ningún triángulo equilátero, de ningún tamaño? De considerar como idénticas aquéllas formaciones que puedan deducirse unas de otras por giros o simetrías, resulta existir únicamente una configuración donde el número de monedas retiradas sea mínimo. Notemos que en la disposición inicial existen dos triángulos equiláteros al bies, cuyas bases no son horizontales.

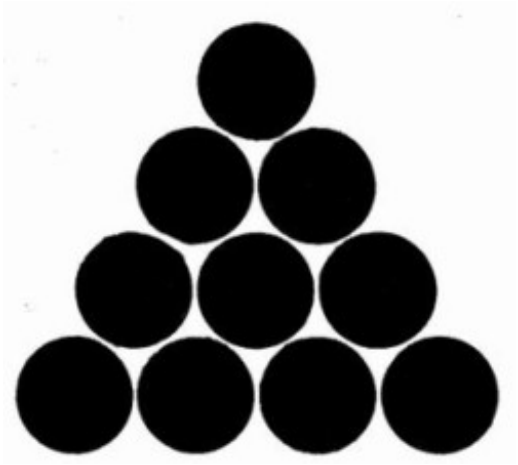


Figura 54. Problema "monetario" de origen japonés

1 Soluciones

1. *a*. Un posible desarrollo como el pedido es:

Blancas	**Negras**
1. C3AR	C3AR
2. C3AD	C3AD
3. C4D	C4D
4. CR x C	PC x C
5. C x C	P x C

Ambos problemas fueron reimpresos en el número de verano de 1969 de una revista matemática llamada *Manifold*, publicada en la Universidad de Warwick, en Coventry, Inglaterra. En ella se citaba como fuente un número de la *Chess Review* del año 1947. La variante aquí presentada se debe al ajedrecista norteamericano Larry Blustein.

Mannis Charosh me ha llamado la atención acerca de una interesante versión del problema de los caballos desaparecidos. En lugar de eliminar los caballos de rey de ambos bandos deben suprimirse los de dama y además, en lugar de avanzar dos cuadros con el peón de dama ahora debe avanzar sólo uno. También este problema admite solución en cuatro jugadas; pero la solución tiene ahora el mérito de ser única. (En la versión que he presentado aquí, las dos primeras jugadas de las negras son intercambiables.) La nueva variante apareció en la *Fairy Chess Review* de febrero de 1955, siendo allí atribuida a G. Schweig, quien la dio a conocer en 1938. Dejo al cuidado del lector la tarea de resolverla.

b. La probabilidad es 1. Puesto que los pares de piezas desechados contienen una pieza de cada color, los números de piezas blancas y negras sobrantes serán idénticos.

2. Como ya expliqué, para obtener la fracción generatriz de un número decimal periódico puro, se escribe el bloque periódico en el numerador, y en el denominador, tantos nueves cuantas cifras tenga el bloque periódico. En este ejemplo, TALK/9999, simplificada al máximo, debe dar EVE/DID. Por consiguiente, DID tiene que ser divisor de 9999. Tan sólo hay tres divisores de 9999 que sean

capicúas y de tres cifras, esto es, tan sólo hay tres candidatos para DID: 101, 303, y 909.

Si fuese DID = 101, entonces EVE/101 = TALK/9999, y de aquí, EVE = TALK/99. Reordenando términos, TALK = (99)(EVE). Como hemos supuesto que DID es 101, EVE ya no podrá serlo, y siendo EVE capicúa, tendrá que ser mayor que 101. Ahora, un número mayor que 101 multiplicado por 99 dará producto con al menos cinco cifras. Como TALK tiene sólo cuatro, la hipótesis DID = 101 debe ser descartada.

De ser DID = 909 tendríamos EVE/909 = TALK/9999 y despejando, TALK = (11)(EVE). Pero entonces la última cifra de TALK tendría que ser E. Por no serlo, también es preciso desechar la posibilidad DID = 909.

Tan sólo cabe, pues, que DID = 303. Como EVE tiene que ser menor que DID (porque su cociente empieza 0,...) E sólo puede ser 1 ó 2. De los 14 números capicúas que empiezan por estas cifras (121, 141, ..., 292) únicamente 242 produce un desarrollo decimal conforme al esquema 0,TALKTALKTALK... donde todas las cifras del período son distintas de las de EVE y DID.

La única solución es, por tanto, 242/303 = 0,79867986... De no haber supuesto que la fracción EVE/DID era irreducible, habría una segunda solución, 212/606 = 0,34983498... lo que demuestra, como Joseph Machady agudamente hizo notar, que EVE no sólo hablaba sin parar (EVE-OVER-DID-TALK ...) sino que al hablar lo hacía con segundas... (double-talked).

3. Hay muchas formas de probar que el ángulo *C* (Figura 51) es suma de los ángulos *A* y *B*.

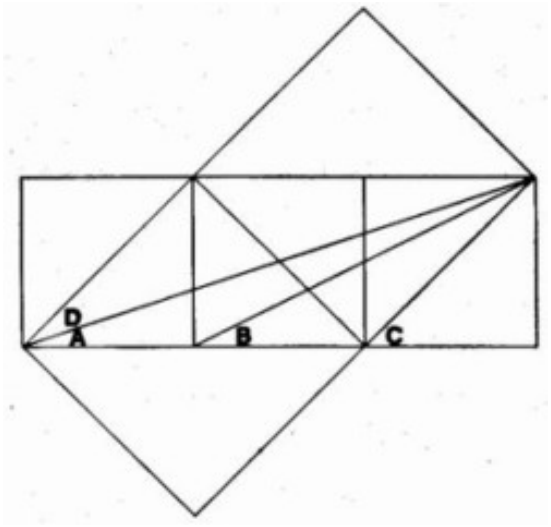


Figura 55. Construcción que demuestra el teorema de los tres cuadrados

He aquí una sencilla (Figura 55). Construyamos los cuadrados trazados con línea gris. Los ángulos *B* y *D* son iguales, por ser homólogos en triángulos rectángulos semejantes. Como los ángulos *A* y *D* suman, evidentemente, *C*, basta sustituir *D* por su igual *B* para tener demostrado que *C* es suma de *A* y de *B*.

Este problemita provocó una riada de cartas de lectores enviando docenas de diferentes demostraciones. De ellos, buena parte evitaron recurrir a construcciones geométricas, tomando las diagonales iguales a las raíces cuadradas de 2, 5 y 10, y calculando después razones de segmentos hasta dar con dos triángulos semejantes de los cuales se dedujera la demostración pedida. Otros corresponsales, en cambio, han generalizado el problema en las formas más insólitas.

En el *Journal of Recreational Mathematics* se encuentran publicadas 54 demostraciones diferentes, recopiladas por Charles Trigg (vol. 4, abril de 1971, pp. 90-99). Una demostración con papel y tijeras, de Ali R. Amir-Moéz, apareció en la misma revista (vol. 5, invierno de 1973, pp. 89). Pueden verse otras demostraciones en una nota de Roger North publicada en la *Mathematical Gazette*, diciembre de 1973, pp. 334-36, con segunda parte en la misma revista, octubre de 1974, pp. 212-15. Puede verse una generalización del problema a una hilera de cuadrados en el artículo de Trigg: «Geometrical Proof of a Result of Lehmers», en *The Fibonacci Quarterly*, vol. 11; diciembre de 1973, pp. 539-40.

4. Para ganar la apuesta es suficiente escribir un 1 junto a la yema del pulgar que está ocultando la hilera de círculos. Al levantar la mano nuestro espectador, el papel mostrará un número binario formado por un 1 seguido de una hilera de ceros. Suponiendo que los ceros representen *n* monedas, este número binario será equivalente al número decimal 2n que es el número total de distintas ordenaciones en que pueden salir cara o cruz al lanzar sucesivamente *n* monedas.

5. Al presentar el rompecabezas de bloques deslizantes de Escott en mi sección de *Scientific American* di una solución que requería 66 movimientos. Muchos lectores consiguieron rebajar tal número a sólo 48, y ésta es por ahora la solución más breve que se conoce.

Mas la solución de 48 movimientos no es única. La que presentamos en la Figura 56 (que me fue enviada por John W. Wright) puede considerarse típica. Las letras S, B, D, I (subir, bajar, derecha, izquierda) sirven para denotar los movimientos. En todos los casos es preciso mover las piezas indicadas tanto cuanto sea posible en la dirección expresada.

Movimiento	Bloque	Dirección
1	6	S, D
2	1	B
3	5	I
4	6	I
5	4	B
6	5	D
7	2	B
8	3	I
9	5	S
10	2	D
11	6	S, I
12	4	I, S
13	7	S
14	10	D
15	9	D
16	8	B
17	1	B
18	7	I
19	2	B
20	4	D, B
21	5	B
22	3	R
23	6	S
24	5	I, S

Movimiento	Bloque	Dirección
25	4	S
26	2	S
27	10	S
28	9	D
29	7	S
30	1	S
31	8	S, D
32	1	B
33	7	I
34	10	I
35	2	I
36	4	B
37	2	D, B
38	3	B
39	6	D
40	5	D
41	7	S
42	10	I, S, I, S
43	8	S, I, S, I
44	4	I, S
45	2	B, I
46	9	S
47	2	D
48	1	D

Figura 56. Una solución en 48 movimientos para el rompecabezas de los bloques deslizantes

Como la disposición inicial tiene doble simetría, toda solución tiene una inversa. En este caso la inversa comienza por desplazar la pieza número 5 hacia abajo y a la izquierda, en lugar de la pieza 6, que iba hacia la derecha y arriba, y prosigue ejecutando simétricamente los correspondientes movimientos.

6. Un procedimiento para resolver el problema de las seis pesas dos rojas, dos blancas y dos azules consiste en colocar en un platillo una pesa blanca y una roja, y en el otro, una blanca y una azul.

Si la balanza quedase en equilibrio, sabríamos que en cada platillo hay una pesa liviana y otra con sobrepeso. Retiremos de los platillos las pesas de color, dejando únicamente las blancas, una en cada uno. Sabremos así en qué platillo está la pesa blanca más ligera, y en cuál la más pesada. Al mismo tiempo, ello nos dice cuál de

las pesas antes empleadas (una roja, una azul) es más ligera que la otra, lo que a su vez nos aclara cuáles son las pesas liviana y pesada del par azul-rojo no usado todavía.

Si la balanza no queda en equilibrio al efectuar esta primera pesada, es seguro que caerá del lado donde se encuentre la pesa blanca de mayor peso. Empero seguimos a oscuras con respecto a la roja y la azul. Compararemos pues la roja ya utilizada con la gemela de la azul empleada para la primera pesada (o bien, la azul primitiva con la gemela de la roja). Como hace notar C. B. Chandler (a quien debo esta sencilla solución) el resultado de la segunda comparación más el recuerdo de lo ocurrido en la primera, ya es suficiente para distinguir las seis pesas.

Aquellos lectores que hayan encontrado este problema de su gusto podrán pasar otro rato entretenido analizando la siguiente variante, ideada por Ben Braude, mago amateur y dentista, neoyorquino. Las seis pesas son idénticas en todos los aspectos (color incluido) salvo en que hay tres que son más pesadas que las otras. Las tres con sobrepeso son idénticas; lo mismo ocurre con los pesos de las tres más ligeras. La tarea consiste en identificar cada una de las seis haciendo tres pesadas independientes con una balanza.

Como Thomas O'Beirne ha hecho notar, el problema de Braude ofrece dos tipos de soluciones, de caracteres que podríamos llamar complementarios o duales. En unas, las pesas son comparadas par contra par; en otras, cada platillo es cargado siempre con una sola pesa. Debo a John Hamilton la concisa tabla siguiente, donde se dan las cuatro posibilidades del método más sencillo (publicado en el número de marzo de 1970 de una revista de ilusionismo, *The Pallbearers Review*).

1	**2**	**3**	**4**
a \ B	a \ B	a – b	a – b
c \ D	c – d	b – c	b \ C
e \ F	d \ E	c \ D	D – E

Las letras mayúsculas indican pesos con sobrecarga, y las minúsculas, pesos mermados. Un trazo horizontal indica equilibrio, mientras que la barra oblicua muestra de qué lado cae la balanza.

7. La solución, única, es 6.210.001.000. No dispongo aquí de espacio para dar una demostración detallada; puede verse una francamente buena en la sección de divertimentos matemáticos de la *Technical Review* (febrero de 1968) del M. I. T., debida a Edward P. DeLorenzo. En el mismo lugar del número de junio de 1968 hay una demostración de Kenneth W. Dritz de que para casilleros de menos de 10 cuadros, las únicas soluciones en numeración de base 10 son 1.210; 2.020; 21.200; 3.211.000; 42.101.000, y 521.001.000.

Puede verse una solución general, debida a Frank Rubin, en el *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 11, 1978-79, pp. 76-77. En ella demuestra que no existe ningún número «autodescriptivo» en las bases 1, 2, 3 y 6. En base 5 existe tan sólo uno, 521.000. En base 4 tenemos 1.210 y 2.020. y es la única base donde existe más de una solución de longitud igual a la base. En todas las bases mayores que 6 existe una única solución, que es de la forma R21 (0 ... 0)1.000, siendo R cuatro unidades menor que la base de numeración, y el número de ceros entre paréntesis, siete menos que la base.

8. El número mínimo de monedas a retirar es de cuatro (véase la Figura 57), correspondientes a las sombreadas en gris en la figura. De esta forma, nunca se podrán tomar tres centros de las monedas restantes que se encuentren en los vértices de un triángulo equilátero, Salvo por rotación, la configuración de las monedas es única, y evidentemente, idéntica a su simétrica.

Figura 57. La solución al problema de las 10 monedas

Capítulo 12
Dominós

Llama la atención lo poco que, según parece, se sabe acerca de los orígenes del dominó. En la literatura occidental no hay referencias a este juego hasta mediados del siglo XVIII, en que empezaron a jugarse en Italia y Francia las primeras partidas. Desde ahí, el juego se extendió al resto del continente, y más tarde, a Inglaterra y América. En Occidente, la colección normal de piezas de dominó ha consistido siempre en 28 teselas o losetas formadas por dos cuadrados adyacentes, que contienen todos los posibles pares de dígitos, de 0 hasta 6 (véase la Figura 58).

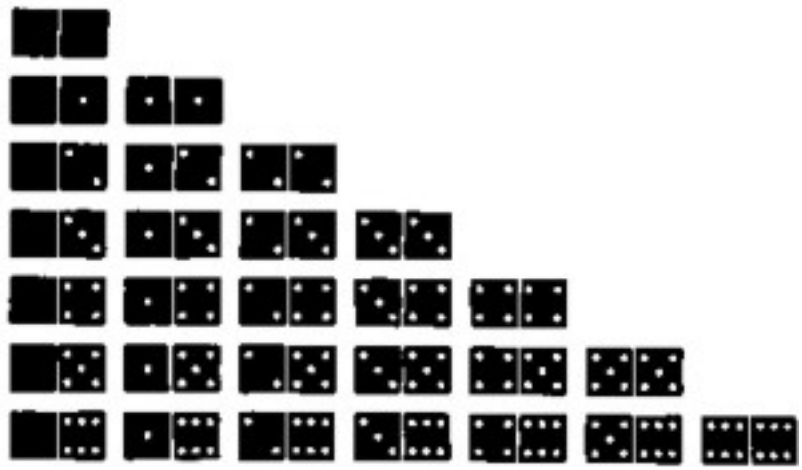


Figura 58. El juego de piezas de dominó habitual en Europa y América

Cada dígito aparece ocho veces en el juego. Se han construido juegos excepcionales, que contienen desde el «blanca doble», 0-0 (los dos cuadros en blanco) hasta el 9-9 (55 piezas en total) o hasta el 12-12 (91 piezas) con objeto de poder admitir número mayor de jugadores. Por lo común, las piezas son negras, con puntos blancos vaciados en sus caras, o blancas con puntos negros. El nombre quizá proceda de la semejanza del 1-1 con el antifaz negro que se usaba en los bailes de máscaras de la época.

Aún hoy se ignora si los dominós europeos fueron invención autóctona, o si fueron plagiados de los dominós chinos. Sea como fuere, el juego era ya muy conocido en China varios siglos antes de serlo en Europa. En los dominós chinos, llamados *kwat*

p'ai, no hay piezas con caras en blanco. En este caso, la colección contiene todas las combinaciones, por pares, desde el 1-1 hasta el 6-6 (21 piezas), pero hay además 11 piezas duplicadas, así que en total son 32. Lo mismo que ocurre con los dados chinos, el as y el cuatro tienen los puntos grabados en rojo. Los puntos de las piezas restantes son blancos (o negros, si las piezas son blancas), salvo en el 6-6, donde tres de los seis puntos de cada cuadro son también rojos. (Los dominós coreanos son idénticos, con la única particularidad de que en el as, el punto es mucho mayor que en las demás piezas). En los dominós chinos, cada pieza tiene un nombre pintoresco: el 6-6 es «el cielo»; el 1-1 es «la tierra», el 5-5 es «la flor del ciruelo», el 6-5, la «cabeza del tigre», etc. Los nombres de las piezas son iguales a los que reciben los 21 posibles resultados del lanzamiento de un par de dados.

Los dominós chinos suelen ser de cartón, en vez de la madera, marfil, pasta o ébano que es habitual en los nuestros, y se manejan como naipes. Lo mismo que en Occidente, estas piezas sirven para numerosos juegos. Sobre los juegos occidentales más extendidos puede consultarse en cualquier edición reciente del *Hoyle's Games*. Con respecto a los juegos de dominó chinos y coreanos, seguramente la mejor referencia sea *Games of the Orient*, de Stewart Culin, obra de 1895 reimpresa por Charles Tuttle en 1958. No hay dominós propiamente japoneses, y en este país se juega con el sistema occidental.

Según la *EncycIopaedia Britannica*, ciertas tribus esquimales utilizan piezas de hueso, de 60 a 148, en partidas y frenéticos torneos, con fuertes apuestas, que en ocasiones pueden ser las esposas de los jugadores. En Cuba, las partidas de dominó han sido desde hace mucho uno de los pasatiempos favoritos, y hasta hace algunos años podía decirse otro tanto de España, si bien esta afición ha decaído bastante sobre todo entre los jóvenes.

Uno de los más antiguos problemas de combinatoria con el dominó pide determinar de cuántas formas pueden colocarse en hilera todas las fichas de un juego completo (occidental), sometidas a la regla habitual: que los extremos de piezas en contacto tengan valores iguales. (Una colección se llama completa cuando contiene todos los pares desde el 0-0 hasta el *n*-*n*). El problema es interesante porque admite traducción inmediata a un problema de grafos (véase la Figura 59).

Despreciemos el conjunto trivial, que consta sólo de la pieza 0-0, y tomemos el juego completó más sencillo: 0-0, 0-1, 1-1 (a). La línea que va de 0 a 1 corresponde a la pieza 0-1. Los círculos indican que cada dígito está emparejado consigo mismo, y representan las piezas dobles del juego. El número de formas en que las tres piezas pueden ser dispuestas en fila es idéntico al número de formas en que el grafo puede ser recorrido mediante un camino continuo que no pase dos veces por una misma línea. Evidentemente, sólo hay dos itinerarios así, que difieren únicamente en el sentido de recorrido. Estos dos (0-0, 0-1, 1-1, y su inverso) dan las únicas formas de colocar las piezas en hilera, de forma que los valores de los extremos que se tocan sean iguales.

El problema es menos trivial para el juego de tamaño inmediatamente superior, formado por las seis piezas de 0-0 a 2-2. Su gráfico triangular (b) admite también un sólo recorrido (más el de sentido contrario) pero ahora el camino tiene que cerrarse y retornar al punto de partida, lo que significa que la correspondiente concatenación de dominós es un anillo cerrado: 0-0, 0-1, 1-1, 1-2, 2-2, 2-0; imaginemos unidos los dos extremos: 2-0, 0-0. La cadena puede abrirse por seis sitios, formando cada vez una hilera como la pedida, y por tanto hay seis soluciones distintas, ó 12, si se considera que sentidos de recorrido distintos dan hileras distintas.

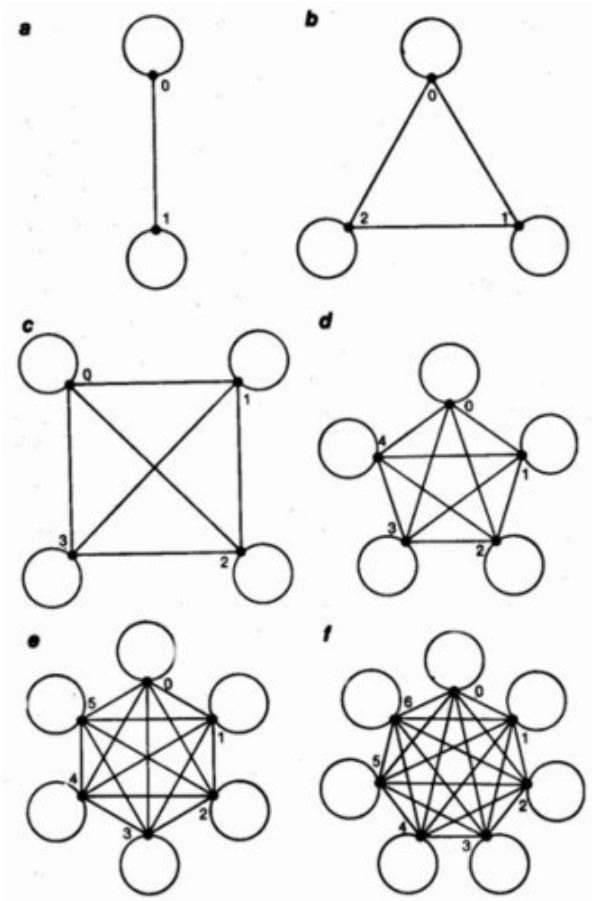


Figura 59. Grafos para resolver el problema de colocar en hilera, un juego completo de dominó

La colección completa de 10 dominós (de 0-0 hasta 3-3) presenta un giro inesperado (c). Ahora, los cuatro vértices son impares, es decir, en cada uno concurren un número impar de líneas. (El punto central, de intersección de las diagonales, no es considerado vértice.) Una clásica regla sobre trazado de grafos, que Leonhard Euler fue el primero en exponer en su famoso análisis del problema de los siete puentes de Königsberg, es que la condición necesaria y suficiente para que un grafo pueda ser recorrido completamente, sin pasar más de una vez por ninguno de sus lados, es que, o bien todos los vértices del grafo sean pares, o bien, de haberlos impares, estos sean exactamente dos. En el primer caso, el recorrido será siempre cerrado, y terminará donde empezó. En el segundo, el camino ha de empezar en uno de los vértices impares y terminar, necesariamente, en el otro. Como en nuestro caso tenemos cuatro vértices impares, no hay ningún camino que

recorra todo el grafo y, por tanto, ninguna forma de que los 10 dominós puedan formar hilera. He aquí otra demostración equivalente de tal imposibilidad. En el juego completo de piezas, cada digito aparece cinco veces. La regla de igualdad de valores en contacto implica que cada dígito ha de presentarse un número par de veces en el interior de la hilera. Hay cuatro dígitos, pero como la fila tiene sólo dos extremos, es imposible la disposición en una sola hilera. Lo más que podemos hacer es recorrer el grafo con dos itinerarios disjuntos, o lo que es equivalente, formar dos filas de piezas, independientes. Como es obvio, las cifras extremas de las filas habrán de ser 0, 1, 2 y 3.

El «grafo completo» correspondiente a cinco puntos, al que se han añadido círculos en los vértices para indicar que éstos conectan consigo mismos, se corresponde con el conjunto completo de 15 teselas, desde 0-0 hasta 4-4 (d). Puesto que todos los vértices son pares, podemos trazar sobre el grafo un recorrido completo y cerrado. (Al igual que en todos los grafos de este tipo, los puntos de intersección del interior del polígono no son vértices.) El recuento del número de recorridos, cada uno de los cuales puede abrirse por 15 lugares, dando una cadena abierta, es tarea moderadamente complicada. Henry Ernest Dudeney, al resolver el problema en su *Amusement in Mathematics* (Problema 283), indica que el grafo pentagonal, círculos aparte, puede ser recorrido de 264 formas, cada una de las cuales produce un anillo de dominós. (Por ejemplo, el camino que comienza 3024... produce el anillo que comienza 3-0, 0-2, 2-4,...) Hay además que insertar en el anillo cinco piezas dobles, lo que puede hacerse de 25 = 32 maneras. Se obtienen así 264 x 32 = 8.448 anillos diferentes. Podemos abrir cada anillo de 15 modos, lo que produce en total 126.720 distintas ordenaciones en hilera, contadas ya las alineaciones en sentido inverso.

El grafo hexagonal correspondiente a seis puntos (e) tiene seis vértices impares. Por consiguiente, el conjunto completo de 21 dominós, desde 0-0 hasta 5-5, no puede ser dispuesto en hilera. Lo más que podremos lograr son tres cadenas distintas, cuyos extremos serán 0, 1, 2, 3, 4, 5.

El juego ordinario de 28 dominós, de 0-0 hasta 6-6, tiene un grafo heptagonal (f). Notemos que 28 es el segundo de los números perfectos (números iguales a la suma de sus divisores). Todos los números perfectos son triangulares (sumas de

enteros consecutivos, 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3,...). Basta una ojeada a la Figura 58 para comprobar que los números triangulares coinciden con los números de piezas de los conjuntos completos de dominós. Todos los vértices del grafo heptagonal son pares, y por consiguiente son posibles los recorridos cerrados. ¡Hay nada menos que 7.959.229.931.520 de estos recorridos, es decir de cadenas cerradas de 28 piezas que podemos abrir por 28 sitios! El correspondiente producto dará todas las alineaciones de los 28 dominós, contadas las de un sentido, y también las de sentido inverso. En todo conjunto completo, exceptuado el que tiene 1 como puntuación máxima, la condición necesaria y suficiente para poder disponerlo en hilera es que el máximo de las puntuaciones de sus fichas sea par. Cuando el máximo, *n*, de las puntuaciones sea impar, harán falta al menos $(n + 1)/2$ líneas, apareciendo en los extremos de éstas la totalidad de los *n* dígitos.

La propiedad de que toda cadena formada por los 28 dominós haya de ser cerrada sirve de base a un viejo truco de salón. El mago retira disimuladamente una cualquiera de las piezas, que no sea doble, y sale de la habitación; los demás jugadores colocan los dominós restantes en una sola hilera, conforme a la regla del juego. Una vez hecho así, el mago es capaz de decirles cuáles serán las puntuaciones de los extremos de la hilera sin para nada observar las piezas. Como es evidente, serán las que porte la pieza que él retiró. (Si lo prefiere, puede predecir por adelantado los números que resultarán, anotándolos en un papel, que se pliega y guarda aparte.) Para repetir el truco, bastará devolver la pieza robada mientras se procede a mezclarlas nuevamente, y retirar, oculta entre los dedos, una nueva pieza.

Se han propuesto muchos problemas de dominó que piden formar con las 28 piezas del juego completo algún polígono simétrico que cumpla ciertos requisitos. Así, un matemático francés del siglo pasado, Edouard Lucas, en el segundo volumen de sus *Récréations Mathématiques*, introduce las que él bautizó con el nombre de «cuadrillas», que son polígonos donde las 28 fichas están dispuestas de forma que las ocho caras que contienen un mismo valor queden agrupadas en dos cuadrados de dos cuadros de lado cada uno. Mostramos aquí una cuadrilla tomada de la obra de Lucas. Con esta figura de contorno, la solución es única, excepto por

permutación de los valores y transformaciones por simetría de la figura completa (véase la Figura 60).

Otro pasatiempo clásico consiste en formar cuadrados mágicos de dominós. Un cuadrado es mágico cuando todas sus filas y columnas, y también sus diagonales principales, tienen la misma suma. Usando piezas del juego normal sólo podrían construirse, en principio, cuadrados mágicos de órdenes 2, 4 y 6. (Los cuadrados de orden impar tienen número impar de casillas, y por consiguiente, al querer construirlos con dominós es forzoso dejar al menos un hueco.) El cuadrado mágico de orden 2 es claramente imposible, pues incluso prescindiendo de las diagonales, las dos fichas tendrían que ser idénticas, y en el dominó no existen piezas repetidas.

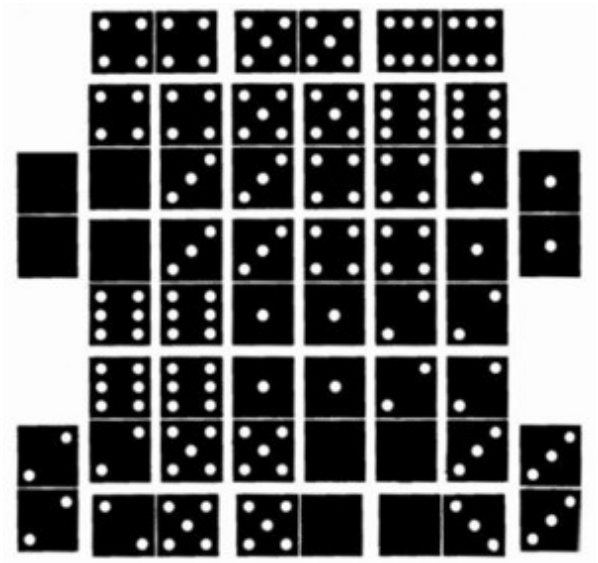


Figura 60. Una "cuadrilla de muestra

Un cuadrado mágico de orden 6 y mínima constante (13) puede ser fácilmente transformado en otro de constante máxima (23), sin más que sustituir cada cifra por su diferencia respecto de 6; los cuadrados así relacionados se llaman «complementarios» módulo 6. Para demostrar que 13 y 23 son las constantes mágicas mínima y máxima, empecemos observando que el total de puntos de un cuadrado mágico de orden 6 ha de ser exactamente divisible entre 6. Puesto que 78 y 138 son, respectivamente, el mínimo y el máximo de los múltiplos de 6 que son

descomponibles en suma de puntuaciones de 18 dominós, resulta que 78/6 = 13, y 138/6 = 23 son las constantes mágicas mínima y máxima posibles.

Las constantes mínima y máxima para cuadrados mágicos de orden 4, formados por ocho dominós tomados del juego normal, son 20/4 = 5 y 76/4 = 19. Partiendo de un cuadrado con la constante 5 (Figura 61, abajo a la izquierda) y reemplazando cada dígito por su diferencia con respecto a 6, se obtiene un cuadrado mágico de constante máxima (19). Es posible construir con dominós cuadrados mágicos de orden 4 para todo valor de la constante mágica comprendido entre 5 y 19. ¿Sabrá el lector encontrar ocho dominós del juego ordinario que rellenen el modelo «en negro» (parte inferior derecha de la ilustración) y que sumen 10 según todas las filas, columnas y diagonales principales? En 1969, Wade E. Philpott demostró la posibilidad de formar cuadrados mágicos de dominós, de orden 6, para todo valor de la constante comprendido entre 13 y 23.

Para ver qué sucede con los cuadrados mágicos de orden impar, es forzoso adoptar alguno de los siguientes convenios, nada elegantes, dicho sea de paso:

1. Dejar un hueco de un cuadro, y hacerlo contar como cero. No cuesta mucho demostrar la imposibilidad de los cuadrados mágicos de orden 3 así configurados.
2. Consentir en que uno de los cuadros de una ficha (preferiblemente, de puntuación cero) sobresalga del cuadrado.
3. Tratar cada pieza como un solo número de valor igual a la suma de sus puntos. Puesto que los dominós sencillos del juego ordinario tienen todas las sumas de 1 a 12, el único cuadrado mágico de orden 3 que contiene los nueve dígitos positivos 1, 2, ..., 9, puede ser construido con nueve dominós. Para los órdenes 5 y 7 es preciso emplear sumas repetidas. Leslie E. Card ha descubierto que cualquier conjunto de 25 dominós tomados del juego normal permitirá formar un cuadrado mágico de este último tipo. (Véase «An Enumeration Problem», por David E. Silverman, *Journal of Recreational Mathematics*, octubre de 1970, pp. 226-27).

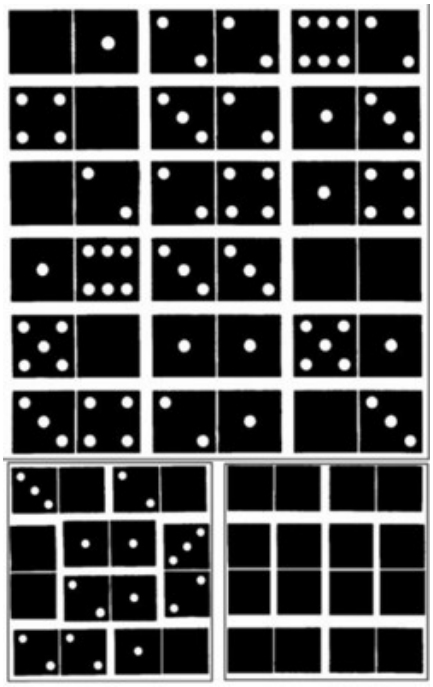


Figura 61. Cuadrados mágicos con dominó

He tenido noticia de un intrigante rompecabezas con dominós a través de Lech Pijanowski, crítico cinematográfico polaco y redactor de una sección semanal dedicada a juegos de habilidad intelectual. Pijanowski ha escrito también un libro de 360 páginas sobre juegos de tablero, *Podroze W. Krainie Gier* [*Viaje al país de los juegos*]. En el que aquí nos ocupa pueden participar cualquier número de jugadores; nosotros supondremos que sean solamente dos. Cada uno procede como seguidamente explico: estando su oponente fuera de la habitación, revuelve las 28 piezas de un juego ordinario (con las puntuaciones hacia abajo) y forma con ellas un rectángulo de siete por ocho, al azar. Se vuelven cara arriba las piezas y se copian sus puntuaciones en un casillero, pero sin mostrar la disposición de las piezas. (Es conveniente hacer una segunda copia que sí muestre su disposición, para demostrar más tarde que tal formación existe verdaderamente.) Los jugadores se intercambian los casilleros de números; el primero en lograr construirlo con fichas gana la partida. Como muchas de las formaciones de números admiten más de una solución, no es necesario hallar la primitiva disposición de los dominós, sino que basta atinar con una que se ajuste a los datos del damero.

Una vez recibida la matriz de números, ¿cómo debemos proceder para dar una solución? Pijanowski sugiere enumerar todos los pares de números que figuran en las 28 piezas, y después inspeccionar la matriz, en búsqueda de aquellos pares que sólo puedan encontrarse en un sitio. En nuestro ejemplo, 4-5, 2-2, 3-6, y 4-4 tienen que encontrarse donde muestra la Figura 62 (b). Podemos añadir inmediatamente el 0-0 y el 3-3, pues no pueden quedar huecos. Dado que ya será imposible que el 0-0 y el 3-3 aparezcan en nuevos lugares, se trazan las dos barras pequeñas, que muestran que ningún dominó puede cruzar ninguna de ellas.

La pieza 2-5 puede encontrarse horizontalmente, o verticalmente, como indican las líneas de trazos (c). En cualquiera de estos casos 01 tendrá que ir en el lugar señalado, a partir del cual podemos añadir 1-3 y 0-4, para evitar la duplicación de 0-1.

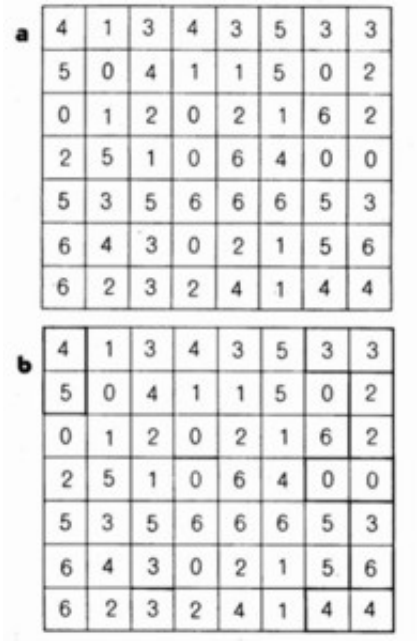


Figura 62. Resolución del problema de formar un casillero numérico con piezas de dominó (véase también la figura siguiente)

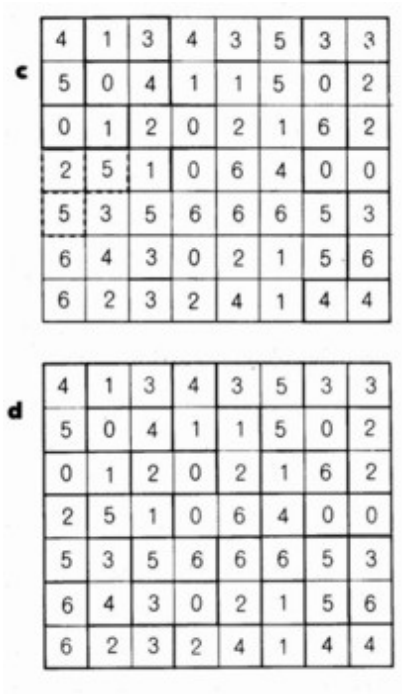
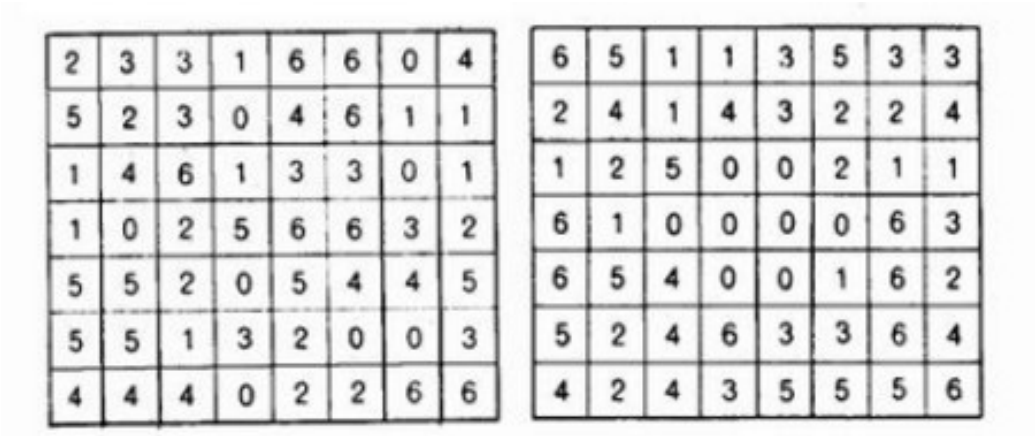


Figura 62a

Podemos añadir inmediatamente nuevas barras. Prosiguiendo de este modo ya no es difícil descubrir una solución. La Figura 62-d muestra una de las cuatro soluciones posibles.

Insto al lector a que mida sus fuerzas con la matriz que vemos en el lado izquierdo de la Figura 63; es sólo un poco más difícil que la explicada y su solución es única. De tener éxito, quizá le sirva de acicate para probar suerte, con la matriz del lado derecho de la misma figura, que tiene dificultad extraordinaria. Ambas han sido facilitadas por Pijanowski; la segunda admite ocho soluciones.



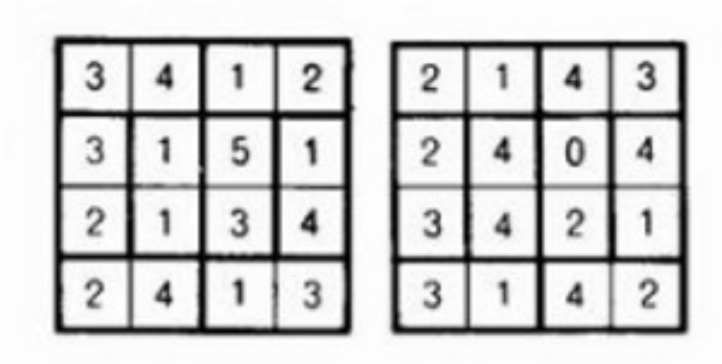
2	3	3	1	6	6	0	4
5	2	3	0	4	6	1	1
1	4	6	1	3	3	0	1
1	0	2	5	6	6	3	2
5	5	2	0	5	4	4	5
5	5	1	3	2	0	0	3
4	4	4	0	2	2	6	6

6	5	1	1	3	5	3	3
2	4	1	4	3	2	2	4
1	2	5	0	0	2	1	1
6	1	0	0	0	0	6	3
6	5	4	0	0	1	6	2
5	2	4	6	3	3	6	4
4	2	4	3	5	5	5	6

Figura 63. Dos problemas de matrizado con dominós

Soluciones

En la Figura 64 podemos ver dos de las muchas soluciones del problema del cuadrado mágico con dominós.

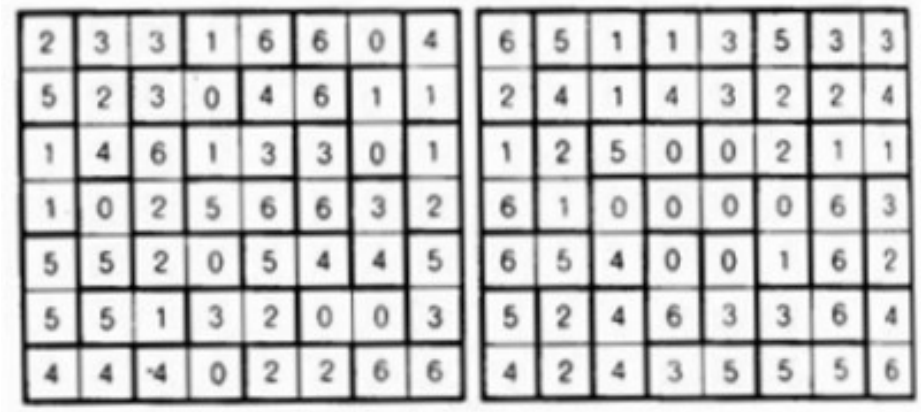


3	4	1	2
3	1	5	1
2	1	3	4
2	4	1	3

2	1	4	3
2	4	0	4
3	4	2	1
3	1	4	2

Figura 64. Soluciones de los cuadrados mágicos

La solución (única) de la primera matriz de Pijanowski se encuentra en la parte izquierda de la Figura 65. La segunda matriz admite ocho soluciones. Hay tres disposiciones fundamentales: de la que vemos en la Figura 65 (derecha), que admite una segunda variante, por reordenación trivial de las dos fichas sombreadas; una segunda, también con dos variantes resultantes de redisponer estas dos mismas piezas, y una tercera, que contiene dos cuadrados de orden dos, cada uno de ellos reconstruible en dos posiciones, que dan cuatro soluciones más.



2	3	3	1	6	6	0	4
5	2	3	0	4	6	1	1
1	4	6	1	3	3	0	1
1	0	2	5	6	6	3	2
5	5	2	0	5	4	4	5
5	5	1	3	2	0	0	3
4	4	4	0	2	2	6	6

6	5	1	1	3	5	3	3
2	4	1	4	3	2	2	4
1	2	5	0	0	2	1	1
6	1	0	0	0	0	6	3
6	5	4	0	0	1	6	2
5	2	4	6	3	3	6	4
4	2	4	3	5	5	5	6

Figura 65. Soluciones de las matrices de dominós

Capítulo 13
Números de Fibonacci y de Lucas

Tuvo esposas Fibonacci mas, que comer
nada comían (pastas aparte).
Tanto así pesaba cada una
como juntas sus dos antecesoras
¡Era la quinta una gran signora!
J. A. Lindon

Entre los matemáticos europeos de la Edad Media, el más grande de todos fue sin duda Leonardo de Pisa, más conocido por Fibonacci, que significa «hijo de Bonaccio» (véase la Figura 66).

Figura 66. Leonardo Pisano Fibonacci, nació en 1170, probablemente en Pisa, falleció en 1250, probablemente en Pisa

A pesar de haber nacido en Pisa, como su padre era empleado en una factoría mercantil italiana asentada en Bougie, en Argelia, fue allí donde el joven Leonardo recibió su primera formación matemática, a cargo de maestros musulmanes. Pronto se dio cuenta de la enorme superioridad de la notación decimal indo arábiga (provista ya de cifras cuyos valores dependen de su posición, y de símbolo para el cero) sobre el engorroso sistema de numeración romana, empleado todavía en su país natal. La más conocida de sus obras, *Liber abaci* (literalmente*, Libro del ábaco*) era en realidad un amplio tratado del sistema de numeración indo arábigo, mas sus razonamientos no parecieron causar demasiada impresión a los mercaderes italianos de la época. Con el tiempo, su libro llegó a ser, empero, la obra de máxima influencia entre todas las que contribuyeron a introducir en Occidente la notación indo arábiga. El *Liber abaci* fue concluido en Pisa en 1202; hasta nosotros ha llegado una edición revisada, de 1228, dedicada a un famoso astrólogo cortesano de la época.

No deja de ser irónico que Leonardo, cuyas aportaciones a la matemática fueron de tanta importancia, sea hoy conocido sobre todo a causa de un matemático francés del siglo pasado, Edouard Lucas, interesado por la teoría de números (y recopilador de una clásica obra de matemáticas recreativas, en cuatro volúmenes), quien encadenó el nombre de Fibonacci a una sucesión numérica que forma parte de un problema trivial del *Liber abaci*. Imaginemos, escribía Leonardo, un par de conejos adultos, macho y hembra, encerrados en un cercado, donde pueden anidar y criar. Supongamos que los conejos empiezan a procrear a los dos meses de su nacimiento, engendrando siempre un único par macho-hembra, y a partir de ese momento, cada uno de los meses siguientes un par más, de iguales características. Admitiendo que no muriese ninguno de los conejitos, ¿cuántos contendría el cercado al cabo de un año?

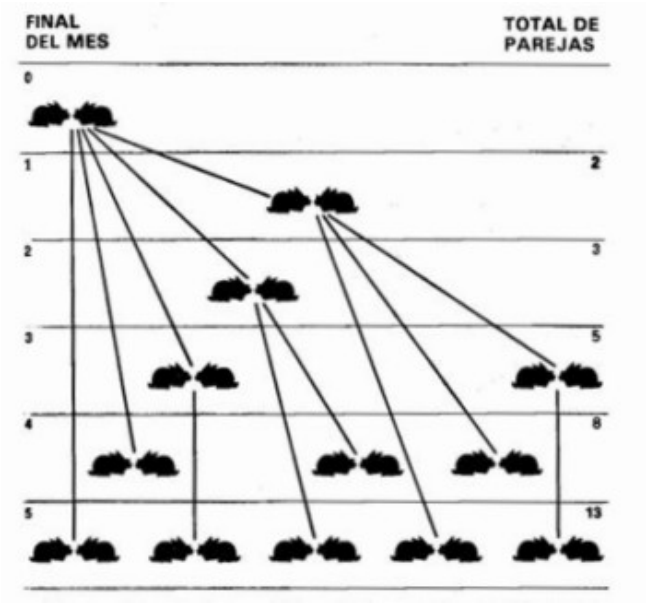


Figura 67. Árbol genealógico de los conejitos de Fibonacci

El gráfico arborescente de la Figura 67 nos muestra qué sucedería durante los cinco primeros meses. Es fácil observar que al término de cada mes los números de pares van formando la sucesión 1, 2, 3, 5, 8... donde cada número (como el propio Fibonacci hizo notar) resulta de sumar los dos que le anteceden. Al cabo de los 12 meses tendremos 377 pares de conejos.

Fibonacci no investigó la sucesión, que tampoco recibió ningún estudio serio hasta comienzos del siglo pasado. Hacia esa fecha los artículos dedicados a ella empezaron a proliferar, son palabras de un matemático, como los conejitos de Fibonacci. Lucas efectuó un profundo estudio de las llamadas sucesiones generalizadas de Fibonacci, que comienzan por dos enteros positivos *cualesquiera* y a partir de ahí, cada número de la sucesión es suma de los dos precedentes. Lucas dio el nombre de sucesión de Fibonacci a la más sencilla de estas sucesiones, a saber, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... (la inmediatamente más sencilla, 1, 3, 4, 7, 11, 18..., es hoy conocida por sucesión de Lucas). Tradicionalmente, la posición que cada número ocupa dentro de una sucesión se denota mediante un subíndice, y de esta forma,

$F_1 = 1$,

$F_2 = 1$,

$F_3 = 2$,

y así sucesivamente. (Se da la lista de los primeros cincuenta números de Fibonacci en la Figura 68.) F_n denota el *n*-ésimo número de Fibonacci; F_{n-1} es el número que antecede a F_n; F_{2n}, es el número de Fibonacci cuyo subíndice es doble del de F_n, etc. La sucesión de Fibonacci ha tenido intrigados a los matemáticos durante siglos, en parte a causa de su tendencia a presentarse en los lugares más inopinados, pero sobre todo, porque el más novel de los amateurs en teoría de números, aunque sus conocimientos no vayan mucho más allá de la aritmética elemental, puede aspirar a investigarla y descubrir curiosos teoremas inéditos, de los que parece haber variedad inagotable.

F_1	1	L_1	1
F_2	1	L_2	3
F_3	2	L_3	4
F_4	3	L_4	7
F_5	5	L_5	11
F_6	8	L_6	18
F_7	13	L_7	29
F_8	21	L_8	47
F_9	34	L_9	76
F_{10}	55	L_{10}	123
F_{11}	89	L_{11}	199
F_{12}	144	L_{12}	322
F_{13}	233	L_{13}	521
F_{14}	377	L_{14}	843
F_{15}	610	L_{15}	1364
F_{16}	987	L_{16}	2207
F_{17}	1597	L_{17}	3571
F_{18}	2584	L_{18}	5778
F_{19}	4181	L_{19}	9349
F_{20}	6765	L_{20}	15127
F_{21}	10946	L_{21}	24476
F_{22}	17711	L_{22}	39603
F_{23}	28657	L_{23}	64079
F_{24}	46368	L_{24}	103682
F_{25}	75025	L_{25}	167761
F_{26}	121393	L_{26}	271443
F_{27}	196418	L_{27}	439204
F_{28}	317811	L_{28}	710647
F_{29}	514229	L_{29}	1149851
F_{30}	832040	L_{30}	1860498
F_{31}	1346269	L_{31}	3010349
F_{32}	2178309	L_{32}	4870847
F_{33}	3524578	L_{33}	7881196
F_{34}	5702887	L_{34}	12752043
F_{35}	9227465	L_{35}	20633239
F_{36}	14930352	L_{36}	33385282
F_{37}	24157817	L_{37}	54018521
F_{38}	39088169	L_{38}	87403803
F_{39}	63245986	L_{39}	141422324
F_{40}	102334155	L_{40}	228826127

Figura 68. Los cuarenta números de Fibonacci y de Lucas

El interés por estas sucesiones ha sido avivado por desarrollos recientes en programación de ordenadores, ya que al parecer tiene aplicación en clasificación de datos, recuperación de informaciones, generación de números aleatorios, e incluso

en métodos rápidos de cálculo aproximado de valores máximos o mínimos de funciones complicadas, en casos donde no se conoce la derivada.

Los resultados más clásicos acerca de estas sucesiones están resumidos en el Capítulo 17 del primer tomo de *History of the Theory of Numbers*, de Leonard Eugene Dickson. Los lectores interesados pueden consultar *The Fibonacci Quarterty*, que desde 1963 viene siendo publicada por la *Fibonacci Association*. Su redactor jefe es Verner E. Hoggatt, Jr., del *San José State College* de San José, Calif. La revista se ocupa, sobre todo, de las sucesiones generalizadas de Fibonacci y de otras sucesiones análogas (corno los llamados «números tribonacci», que son cada uno suma de los tres precedentes), aunque la revista está dedicada también «al estudio de enteros con propiedades especiales».

Seguramente la propiedad más notable de la sucesión de Fibonacci (válida también para las series generalizadas) sea que la razón entre cada par de números consecutivos va oscilando por encima y debajo de la razón áurea, y que conforme se va avanzando en la sucesión, la diferencia con ésta va haciéndose cada vez menor; las razones de términos consecutivos tienen por limite, en el infinito, la razón áurea. La razón áurea es un famoso número irracional, de valor aproximado 1,61803... que resulta de hallar la semisuma de 1 y la raíz cuadrada de 5. Hay abundante literatura (no siempre seria) dedicada a la aparición de la razón áurea y de la sucesión de Fibonacci tan relacionada con ella, en el crecimiento de los organismos y a sus aplicaciones a las artes plásticas, a la arquitectura e incluso a la poesía. George Eckel Duckworth, profesor de clásicas en la Universidad de Princeton, sostiene en su libro *Structural Patterns and Proportions in Vergil's Aeneid* (University of Michigan Press, 1962) que lo mismo Virgilio que otros poetas latinos de su época se sirvieron deliberadamente de la sucesión de Fibonacci en sus composiciones. Por mi parte, me he referido ya a estas cuestiones en un artículo anterior dedicado a la razón áurea, que puede verse en *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.*

En el reino vegetal, la sucesión de Fibonacci hace su aparición más llamativa en la implantación espiral de las semillas en ciertas variedades de girasol. Hay en ellas dos haces de espirales logarítmicas, una de sentido horario, otra en sentido antihorario, como muestran las espirales sombreadas de la Figura 69.

Los números de espirales son distintos en cada familia, y por lo común, números de Fibonacci consecutivos. Los girasoles de tamaño medio suelen contener 34 y 55 espirales, pero hay flores gigantescas que alcanzan valores de hasta 89 y 144. Y en la sección de cartas a la redacción de *The Scientific Monthly* (noviembre de 1951), el geólogo Daniel T. O'Connell y su esposa dijeron haber encontrado en su granja de Vermont un girasol monstruo, con ¡144 y 233 espirales!

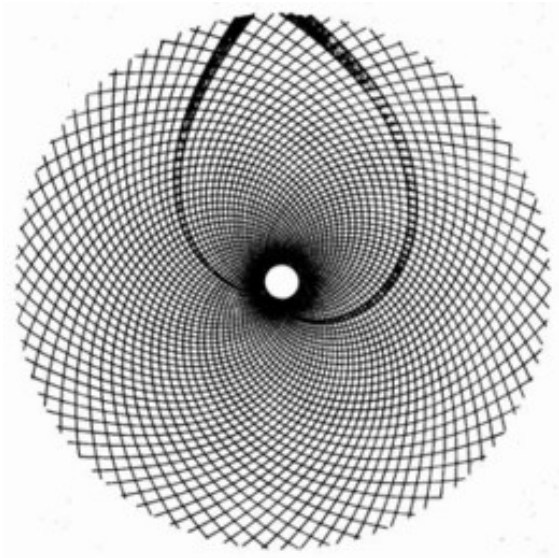


Figura 69. Girasol gigante que contiene 55 espirales en sentido antihorario y 89 en sentido horario

La íntima relación existente entre la sucesión de Fibonacci y la razón áurea queda de manifiesto en la siguiente fórmula explícita para el *n*-ésimo término de Fibonacci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Esta expresión da exactamente el *n*-ésimo número de Fibonacci (al desarrollarla, las √5 se cancelan), pero para números F_n de lugar muy avanzado es fastidiosa de utilizar, si bien pueden conseguirse buenas aproximaciones mediante logaritmos. Otra fórmula mucho más sencilla para el *n*-ésimo número de Fibonacci consiste en dividir entre la raíz cuadrada de 5 la *n*-ésima potencia de la razón áurea. Redondeando el número así obtenido al entero más cercano resulta también el valor

entero exacto del número buscado. Ambas fórmulas son «explícitas», pues conocido *n* dan directamente el valor de Fn Un «procedimiento recursivo» consiste en una serie de etapas, cada una de ellas dependiente de las anteriores. Si para calcular el *n*-ésimo número de Fibonacci se van sumando pares de términos consecutivos hasta alcanzarlo, se estará procediendo iterativamente, o por recurrencia. Al definir el término Fn como suma de los dos términos que le anteceden estamos dando un ejemplo sencillo de fórmula recurrente.

La fórmula que da exactamente el término general de la sucesión de Lucas es

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

pero, como sucedía con los números de Fibonacci, hay un procedimiento mucho más sencillo para hallar el *n*-ésimo número de Lucas. Basta elevar la razón áurea a la *n*-ésima potencia y redondear al entero más cercano.

Dado un número cualquiera de la sucesión de Fibonacci, para calcular el término siguiente no es preciso conocer su índice. Sea A, el término dado. El siguiente viene dado por

$$\left[\frac{A+1+\sqrt{5A^2}}{2}\right]$$

donde los corchetes indican que es necesario tomar la parte entera de la expresión, es decir, el entero más cercano por defecto. Esta *misma* fórmula da el número de Lucas consecutivo a cualquiera de su serie, con tal de que sea mayor que 3.

En toda sucesión de Fibonacci generalizada la suma de los *n* primeros términos es siempre F_{n-2}, menos el segundo término de la serie. Gracias a ello podemos realizar un truco de cálculo súper-rápido. Se le pide a otra persona que escriba dos números cualesquiera, y que vaya formando después tantos términos de la sucesión generalizada que engendran como desee. Pídale después que separe con un trazo dos cualesquiera de éstos. Instantáneamente puede usted darle la suma de todos los números situados antes de la raya. Basta con fijarse en el segundo número

situado al otro lado de la raya, y restarle el segundo término de la sucesión. De tratarse de la sucesión de Fibonacci ordinaria se restaría 1; de ser la sucesión de Lucas, restaríamos 3.

Citaremos ahora algunas conocidas propiedades de la sucesión de Fibonacci ordinaria. Pocas de ellas son costosas de demostrar, y desde luego, todas son casos particulares de teoremas válidos para sucesiones generalizadas. Para abreviar, llamaremos números *F* a los números de Fibonacci.

1. El cuadrado de cada número *F* se diferencia en 1 del producto de los dos números *F* situados a cada uno de sus lados. Conforme se avanza en la sucesión, esta diferencia va siendo alternativamente positiva y negativa. (En los números de Lucas, la diferencia, también constante, vale 5.) En el Capítulo 8 de mi libro *Mathematics, Magic and Mystery* puede verse una famosa paradoja de disección geométrica donde este teorema tiene papel fundamental. En las sucesiones de Fibonacci generalizadas la diferencia constante es $\pm$ (F_{22}, $F_{12} - F_1F_2$).

2. La suma de los cuadrados de dos números *F* consecutivos cualesquiera, F_n^2 más F_{n+12} , es F_{2n+1}. Puesto que el último de estos números es forzosamente de índice impar, resulta de este teorema que al escribir en sucesión los cuadrados de los números de Fibonacci, las sumas de los pares de cuadrados consecutivos formarán la sucesión de números *F* con subíndice impar.

3. Cualesquiera cuatro números *F* consecutivos A, B, C, D verifican la siguiente identidad:

$C^2 - B^2 = A \times D$.

4. La sucesión de las últimas cifras de los números de Fibonacci tiene período 60. Si se toman las dos últimas cifras, la sucesión tiene período 300. Para la sucesión formada a partir de las tres últimas cifras el periodo es ya 1.500; para cuatro, el período tiene 15.000 cifras, para cinco, 150.000, y así sucesivamente.

5. Para cada entero *m* hay una colección infinita de números de Fibonacci exactamente divisibles por *m*, de los cuales al menos uno se encuentra entre los 2*m* primeros términos de la sucesión. No ocurre igual para la sucesión de Lucas. Por ejemplo, ninguno de los números de la sucesión de Lucas es divisible entre 5.

6. El tercero de cada tres números de la sucesión de Fibonacci es divisible por 2; al contarlos de cuatro en cuatro, el cuarto es divisible por 3. El quinto de cada cinco es divisible por 5; el sexto de cada seis, divisible entre 8, y así sucesivamente, siendo los divisores números *F* en sucesión. Dos números de Fibonacci consecutivos (y lo mismo ocurre con los números de Lucas) son primos entre sí, es decir, no tienen más divisor común que el 1.

7. A excepción de 3, todo número *F* que sea primo tiene subíndice primo. (Por ejemplo, 233 es primo y porta subíndice 13, también primo.) Dicho de otra forma, si el subíndice es compuesto, también lo será el número de Fibonacci correspondiente. Pero, cuidado, la recíproca no es cierta. Hay números de Fibonacci con subíndices primos que son números compuestos. El primer ejemplo de este tipo es F_{19}, que vale 4.181. Aunque el subíndice es número primo, 4.181 se descompone en 37 por 113.

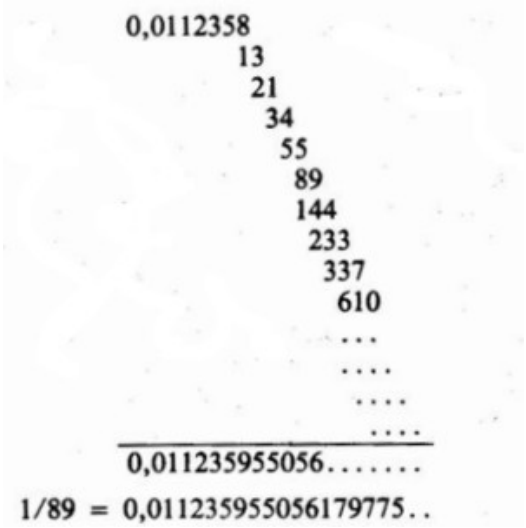
Si el teorema recíproco hubiera sido verdadero en todos los casos, habría quedado resuelta la más importante de las cuestiones sobre sucesiones de Fibonacci todavía pendientes: ¿existirá una infinidad de números primos en la sucesión de Fibonacci? Sabemos que la colección de números primos es infinita, y por consiguiente, si todo *F*-número que portase subíndice primo fuese primo, habría también una infinidad de números primos en la sucesión de Fibonacci. Hoy por hoy se ignora si existe un número primo máximo entre los *F*-números. También subsiste la misma cuestión para los números de Lucas. El más grande de los números *F* primos hoy conocidos es F_9, que consta de 119 cifras. El mayor de los números *L* primos descubiertos es L_{353}, formado por 74 cifras.

8. Con las excepciones triviales de 0 y 1 (tomando $0 = F_0$) entre los números de Fibonacci hay solamente un cuadrado perfecto, $F_{12} = 144$, muy curioso, pues su valor es cuadrado de su subíndice. La existencia o inexistencia de cuadrados mayores que 144 fue problema abierto hasta fecha tan reciente como 1963. En ese año la cuestión quedó resuelta por John H. E. Cohn, del *Bedford College*, de la Universidad de Londres. El mismo demostró también que los únicos cuadrados perfectos contenidos en la sucesión de Lucas son 1 y 4.

9. En la sucesión de Fibonacci hay solamente dos cubos, 1 y 8; en la de Lucas, el único cubo perfecto es 1. (Véase «On Fibonacci and Lucas Numbers Which Are

Perfect Powers», por Hymie London y Raphael Finkeistein, en *The Fibonacci Quarterty*, vol. 77, diciembre de 1969, pp. 476-81).

10. El inverso del decimoprimero número de Fibonacci, 89, puede ser engendrado a partir de esta sucesión, empezando por 0 y sumando después como se muestra:



La lista de propiedades de la sucesión de Fibonacci bastaría para llenar un libro. Otro tanto puede decirse de sus aplicaciones en Física y Matemáticas. Leo Moser ha estudiado las trayectorias de rayos luminosos que inciden oblicuamente sobre dos láminas de vidrio planas y en contacto. Los rayos que no experimentan reflexión alguna atraviesan ambas láminas de sólo una forma (véase la Figura 70).

Figura 70. Un rayo de luz puede reflejarse según F_{n+2} caminos al sufrir n reflexiones entre dos láminas de vidrio

Para los rayos que sufren una reflexión hay dos rutas posibles; cuando sufren dos reflexiones, las trayectorias son de tres tipos, y cuando sufren tres, de cinco. Al ir creciendo el número *n* de reflexiones, el número de trayectorias posibles va ajustándose a la sucesión de Fibonacci: para *n* reflexiones, el número de trayectorias es Fn+2.

La sucesión puede utilizarse de forma parecida para contar el número de distintas rutas que puede seguir una abeja que va recorriendo las celdillas hexagonales del panal (véase la Figura 71).

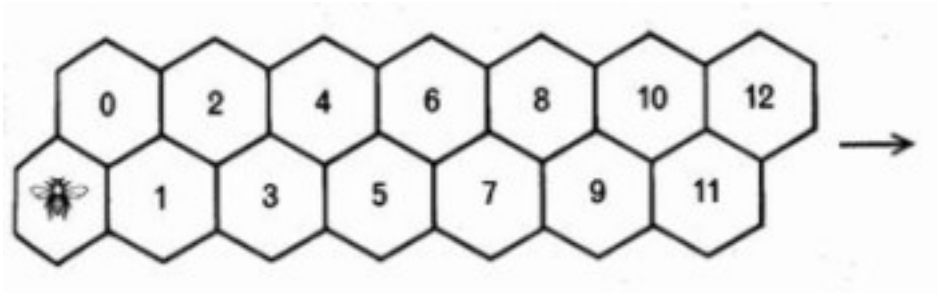


Figura 71. La abeja puede caminar hasta la celdilla n de F_{n+2} maneras

La hilera de casillas puede prolongarse indefinidamente hacia la derecha. Supondremos que la abeja se dirige siempre a una celdilla contigua y a la derecha de la que ocupa. Poco cuesta probar que hay sólo una ruta hasta la casilla 0, dos hasta la número 1, tres hasta la 2, cinco itinerarios que conduzcan a la 3, y así sucesivamente. Al igual que antes, el número de trayectos es F_{n+2}, donde *n* es el número de casillas del problema.

Y ya que viene a cuento, las abejas machos, o zánganos, no tienen padre. C. A. B. Smith ha hecho notar que cada zángano tiene madre, 2 abuelos (los padres de la madre), 3 bisabuelos (y no cuatro, pues el padre de la madre no tuvo padre), 5 tatarabuelos, y así sucesivamente, en sucesión de Fibonacci.

David Klamer ha mostrado que los números de Fibonacci expresan de cuántas maneras podemos construir con dominós (rectángulos de tamaño 1 x 2) rectángulos de dimensión 2 x *k*. Hay sólo una manera de formar el rectángulo 2 x 1; 2 maneras de construir el cuadrado de 2 x 2; 3 para el rectángulo de 2 x 3; 5 para el de 2 x 4, y así sucesivamente.

Fijémonos ahora en el *nim* de Fibonacci, juego inventado hace algunos años por Robert E. Gaskell, y consistente en ir retirando cuentas de una pila que inicialmente contiene *n* fichas. Los jugadores actúan por turno. En la primera jugada no es lícito retirar la pila completa, aunque sí en las sucesivas, siempre que se respeten las siguientes reglas: en cada turno es forzoso retirar al menos una ficha, y ningún jugador puede tomar más del doble del número de fichas que haya tomado su oponente en la jugada anterior. Por tanto, si un jugador se lleva tres, el siguiente no podrá retirar más de seis. Gana la partida quien retire la última ficha.

Resulta que si *n* es número de Fibonacci el segundo jugador puede ganar siempre; en los demás casos, es el primero quien puede conseguir, si juega bien, siempre la

victoria. Si una partida comienza con 20 fichas (que no es número de Fibonacci), ¿cuántas debe retirar el primer jugador para estar seguro de ganar?

El segundo problema se refiere a un truco de cálculo relámpago muy poco conocido. Vuélvase de espaldas, y pídale a un amigo que escriba un par de enteros positivos cualesquiera (uno debajo del otro), que los sume y obtenga un tercero, que debe describir debajo del segundo; que sume los dos últimos números y obtenga un cuarto, prosiguiendo de esta forma hasta formar una columna de diez números. Es decir, ha de escribir los diez primeros términos de una sucesión generalizada de Fibonacci, donde cada término es suma de los dos que le preceden, exceptuados los dos primeros, que son arbitrarios. Hecho esto, usted se vuelve, traza una raya por debajo de los diez sumandos, e inmediatamente escribe la suma.

La clave consiste en multiplicar por 11 el séptimo de los números a sumar, operación que fácilmente se realiza de cabeza. Supongamos que el séptimo número sea 928. Anotamos ya la cifra 8, que será la última cifra de la suma. Sumamos 8 y 2, y obtenemos 10. Escribimos en la suma un 0 inmediatamente al lado del 2, y llevamos 1. La suma del siguiente par de cifras, 9 y 2, es 11. Añadimos el 1 que arrastrábamos, y tenemos 12. Escribirnos el 2 a la izquierda del 0 en la suma, y seguimos llevando 1, que sumaremos al 9, y en la suma anotamos 10 a la izquierda del 2. La suma, ya terminada, es 10.208. En resumen, se suman las cifras por pares de derecha a izquierda, llevando 1 cuando sea necesario, y terminando con la última cifra de la izquierda.

¿Sabrá el lector demostrar que la suma de los 10 primeros números de una sucesión de Fibonacci generalizado es siempre 11 veces el séptimo término?

Apéndice

Los números de «Tribonacci» (1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ...) fueron así bautizados por el joven y brillante matemático Mark Feinberg, quien publicó un artículo sobre ellos en *The Fibonacci Quarterly*, (octubre de 1963), cuando sólo contaba 14 años. Su carrera en la Universidad de Pennsylvania quedó cercenada en 1967, en su segundo año de universidad, al resultar muerto en un accidente de motocicleta.

En su artículo sobre números de Tribonacci, Feinberg puso de relieve que al ir avanzando en la sucesión, la razón entre términos adyacentes converge hacia 0,5436890126.... y más exactamente, hacia la raíz real de la ecuación $x^3 + x^2 + x$, 1 = 0. Podemos generalizar más y estudiar sucesiones donde cada término sea suma de los cuatro (números de Tetranacci), cinco, seis, etc., números que lo anteceden. En todas esta sucesiones, la razón de cada término al siguiente tiene un límite; al ir aumentando el número de términos a sumar, la razón límite disminuye, tendiendo a su vez hacia 0,5. Tal generalización había sido publicada hacia 1913 por Mark Barr. (Véase mi *Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, página 101.)

«La notación de Fibonacci» (que presentamos en la solución del primer problema) consiste en expresar unívocamente cada entero en suma de números de Fibonacci; esta descomposición tiene importancia en técnicas de clasificación mediante ordenador. En mi sección de «Juegos Matemáticos» de *Scientific American* de abril de 1973 puede verse un método para emplear el «ábaco de Napier» (dispositivo de cálculo muy poco conocido, cuyo inventor ideó también los «dados de Napier») para cálculos en notación de Fibonacci. Con respecto a la importancia de la notación de Fibonacci en la estrategia de juego del «nim de Wythoff», puede verse mi artículo de «Juegos Matemáticos» en el número de mayo de 1977 de INVESTIGACIÓN Y CIENCIA (edición en español de *Scientific American*). Y respecto a la relación entre el triángulo de Pascal (o de Tartaglia) y la sucesión de Fibonacci, véase el Capítulo 15 de mi *Carnaval Matemático* (LB 778, Alianza Editorial).

Las sucesiones de Fibonacci y Lucas están interrelacionadas por docenas de fórmulas sencillas. Por ejemplo, el *n*-ésimo número de Lucas es igual a $F_{n-1} + F_{n+1}$. El producto de F_n y L_n es igual a F_{2n}. La siguiente ecuación diofántica

5 x 2 + 4 = y2

tan sólo tiene soluciones enteras cuando *x* es un número de Fibonacci e *y* sea el correspondiente número de Lucas.

Las sucesiones de Fibonacci y Lucas tienen en común los números 1 y 3. ¿Habrá otros números mayores, comunes a las dos sucesiones? La respuesta resulta

negativa. Véase la nota de Martin D. Hirsch sobre «Additive Sequences», en *Mathematies Magazine*, vol. 50, noviembre de 1977, página 264.

Como ya he mencionado, el más notable de los problemas abiertos concernientes a sucesiones de Fibonacci es el de si contienen o no colecciones infinitas de números primos. En una sucesión de Fibonacci generalizada, si los primeros números son divisibles ambos por un mismo número primo, todos los términos posteriores lo serán también, y es evidente que tales sucesiones no podrán contener más de un número primo. Supongamos, pues, que los dos primeros números sean primos entre sí (esto es, que su único común divisor sea 1). ¿Podrán existir sucesiones generalizadas que no contengan absolutamente ningún número primo?

El primero en resolver esta cuestión fue R. L. Graham, en «A Fibonacci-like Sequence of Composite Numbers», en *Mathematics Magazine*, vol, 57, noviembre de 1964, pp. 322-24. Existe una infinidad de sucesiones así, pero la mínima (en el sentido de serlo sus dos primeros números) es la que empieza por:

178677270192880263226871513045579 3,

105968322505391511105816514168699 5.

Soluciones

El primer problema consiste en hallar la jugada de apertura correspondiente a la estrategia vencedora en una partida de «*nim* de Fibonacci», sabiendo que el montón de fichas consta de 20 piezas. Como 20 no es número de Fibonacci, si el primer jugador actúa con inteligencia, es seguro que ganará la partida. Para determinar la estrategia vencedora, se descompone el número 20 en suma de números de Fibonacci, comenzando por el mayor posible, 13, sumando después el máximo posible, 5, y después el siguiente, 2. Así que 20 = 13 + 5 + 2 es la descomposición buscada. Todo entero positivo puede ser expresado de forma única como suma de números de Fibonacci; tal descomposición no podrá nunca contener números de Fibonacci consecutivos. Los números F quedan expresados por un solo número: ellos mismos.

El último número, 2, es el número de piezas que debe retirar el primer jugador para ganar. El segundo jugador queda imposibilitado, por las reglas del juego, para tomar más del doble de 2; por consiguiente, no puede reducir la pila (que tiene

ahora 18 cuentas) al número de Fibonacci más cercano, que es 13. Supongamos que decida retirar cuatro piezas; la pila contendrá entonces 14 piezas, número que se expresa como 13 + 1 en suma de dos números de Fibonacci, y el primer jugador deberá entonces tomar 1 pieza. Prosiguiendo con esta estrategia, es seguro que logrará tomar la última ficha, y con ella, ganar la partida.

Si el número de inicial de piezas fuera número de Fibonacci, por ejemplo, 144, es seguro que el segundo jugador podrá ganar. Es verdad que el primer jugador puede retirar 55 piezas, dejando 89, que es el siguiente número de Fibonacci, pero entonces el segundo jugador puede ganar inmediatamente, retirando lícitamente las 89 piezas restantes, pues 89 es menor que el doble de 55. El primer jugador se ve entonces precisado a dejar un número de piezas no perteneciente a la sucesión de Fibonacci, y el segundo jugador consigue ganar aplicando la estrategia que acabo de explicar. (Véase Donald E. Knuth, *Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, 1968, página 493, Ejercicio n. 37, y también, «Fibonacci Nim», por Michael J. Whiniham, en *The Fibonacci Quarterly*, vol. 1, n. 4, diciembre de 1963, pp. 9-13.)

Para demostrar que en toda sucesión de Fibonacci generalizada la suma de los 10 primeros términos es siempre 11 veces el séptimo, sean *a* y *b* los dos primeros números. Los 10 números, y su suma, pueden ser representados como vemos en la Figura 72. Es evidente que la suma es 11 veces el séptimo número. Notemos también que los coeficientes de *a* y *b* de estos desarrollos forman sendas sucesiones de Fibonacci.

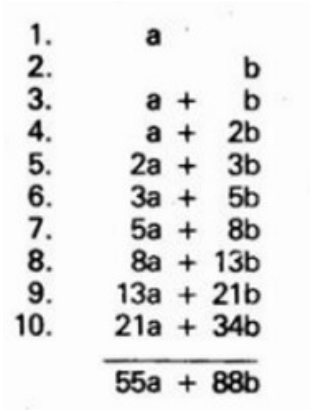


Figura 72. Solución al problema de Fibonacci

Capítulo 14
Simplicidad

Cumplidora estricta de un decreto absoluto, con la naturalidad más sencilla.
Emily Dickinson

Los versos de Emily Dickinson se inspiraban en una oscura piedrecilla del camino; pero si esta piedra es considerada como parte del universo, fiel cumplidora de las leyes naturales, a nivel microscópico tienen lugar en ella toda suerte de intrincados y misteriosos procesos. La noción de simplicidad, tanto en matemáticas como en las ciencias experimentales, suscita una pléyade de cuestiones profundas, complejas y todavía no resueltas. El número de leyes fundamentales de la naturaleza, ¿es muy reducido, como algunos suponen, o por el contrario, es enormemente grande o tal vez infinito, como creen Stanislaw Ulam y muchos otros? Las propias leyes, ¿son sencillas o complejas? ¿Qué pretendemos decir, exactamente, cuando afirmamos que una ley o un teorema matemático es más sencillo que otro? ¿Existe algún procedimiento objetivo para medir la sencillez de una ley, una teoría o un teorema?

Casi todos los biólogos, y particularmente quienes investigan las funciones cerebrales, se muestran anonadados por la tremenda complejidad de los organismos vivos. Por el contrario, y a pesar de que recientemente la mecánica cuántica se ha complicado mucho al ser descubiertas cientos de partículas e interacciones nuevas, casi todos los físicos conservan viva la fe en la simplicidad fundamental de las leyes naturales.

De forma particular puede aplicarse esta afirmación a Albert Einstein. El mismo escribió: «Nuestra experiencia nos justifica en la confianza de que la Naturaleza es concreción de las ideas matemáticas más sencillas». Cuando tuvo que elegir las ecuaciones tensoriales capaces de dar cuenta de su teoría de la gravitación, entre todos los sistemas capaces de cumplir los requisitos necesarios optó por el más

sencillo, y a continuación los publicó, con plena confianza (como en cierta ocasión le dijo al matemático John G. Kemeny) de que «Dios no hubiera dejado escapar una oportunidad así de hacer tan sencilla la Naturaleza». Se ha opinado que los enormes logros de Einstein han sido expresión intelectual de una compulsión psicológica de sencillez, que Henry David Thoreau expuso en Walden como sigue:

«¡Sencillez, sencillez, sencillez! Hágame caso, que sus asuntos sean como dos o tres, no como cientos o millares. No haga por contar un millón, sino media docena, y lleve su contabilidad en una uña.»

En su biografía de Einstein, Peter Michelmore refiere que «el dormitorio de Einstein parecía la celda de un monje. No había en él cuadros ni alfombras... Se afeitaba sin muchos miramientos, con jabón de fregar. En casa solía ir descalzo. Tan sólo cada dos o tres meses dejaba que Elsa (su esposa) le descargara un poco la pelambrera... Pocas veces encontraba necesaria la ropa interior. También dejó de lado los pijamas, y más tarde, los calcetines. "¿Para qué sirven?", solía preguntar. "No producen más que agujeros." Elsa llegó a perder la paciencia un día en que lo pilló cortando de codo abajo las mangas de una camisa nueva. Su explicación fue que los puños requieren botones o gemelos y es necesario lavarlos con frecuencia, total, una perdida de tiempo».

«Toda posesión», decía Einstein, «es una piedra atada al tobillo». Parece una cita directamente tomada de Walden.

Mas la Naturaleza sí parece llevar muchas piedras atadas a los tobillos. Las leyes fundamentales tan sólo son sencillas en primera aproximación; conforme es preciso refinarlas para poder encajar en ellas nuevas observaciones se van haciendo más y más complejas. Alfred North Whitehead nos prevenía que la máxima que debe inspirar al científico es «buscar la sencillez, y desconfiar de ella». Para describir la caída de los cuerpos pesados, Galileo eligió la más sencilla de las ecuaciones capaces de expresar el movimiento. Al no tener en cuenta la altitud del cuerpo, su ley tuvo que ser modificada, y sustituida por las ecuaciones newtonianas, algo más complejas. También Newton tenía gran fe en la sencillez radical de la Naturaleza: «La Naturaleza se complace en la sencillez», escribió, parafraseando un pasaje de Aristóteles, «y no en la pompa y afectación de crear causas superfluas». Empero, las ecuaciones de Newton tuvieron que ser, a su vez, modificadas por Einstein; y en

nuestros días hay físicos, Robert Dicke entre ellos, que consideran insuficientes las ecuaciones de gravitación einstenianas y creen que habrán de ser modificadas y transformadas en otras más complejas.

Si bien es cierto que muchas leyes fundamentales son sencillas, sería peligroso inducir que las aún por descubrir habrán de serlo también. Las aproximaciones sencillas son, evidentemente, las más fáciles de descubrir en primer lugar. Puesto que es «propósito de la ciencia buscar a hechos complejos las explicaciones más simples», y volvemos aquí a citar a Whitehead (Capitulo 7 de *The Concept of Nature*), corremos el riesgo «de caer en el error» de pensar que la Naturaleza es intrínsecamente sencilla «porque el objetivo de nuestra búsqueda es la sencillez».

A veces la ciencia simplifica las cosas, mediante teorías que reducen a una misma ley fenómenos tenidos por independientes hasta entonces, por ejemplo, la equivalencia entre inercia y gravitación en teoría general de relatividad. No menos frecuentemente se descubre que tras fenómenos de apariencia sencilla, como se pensaba era la estructura de la materia, yace, agazapada, la más insospechada complejidad. Durante años, Johannes Kepler estuvo luchando en defensa de la circularidad de las órbitas planetarias, porque entre las curvas cerradas, la circunferencia es la más sencilla. Cuando finalmente se convenció de que las órbitas eran elípticas, escribió que las elipses eran «estiércol» que se vio obligado a introducir para librar a la astronomía de cantidades de estiércol mucho mayores. Este comentario revela gran perspicacia, pues sugiere que introduciendo mayor complejidad en cierto nivel de una teoría podemos lograr mayor simplicidad en el conjunto.

No obstante, parece como si a cada paso del camino la simplicidad se vaya filtrando misteriosamente en la obra del científico, haciendo que de entre las diversas hipótesis operativas, la más sencilla sea la más verosímil. «La más sencilla» se emplea aquí en sentido estrictamente objetivo e independiente de la observación humana, a pesar de que nadie sepa cómo definir con rigor la noción de simplicidad. Naturalmente, desde el punto de vista práctico, una teoría puede ser más sencilla que otra en diversidad de aspectos, pero éstos son irrelevantes para la gran cuestión que estamos formulando. Así lo ha expresado el filósofo Nelson Goodman: «Cuando se desea ir rápidamente de un sitio a otro y hay varias rutas posibles y con

iguales probabilidades de ser transitables, nadie te pregunta por qué has tomado la más corta». Dicho de otra forma, cuando dos teorías no son equivalentes, se deducen de ellas predicciones diferentes, y el científico estima que tienen igual probabilidad de ser ciertas, pondrá a prueba en primer lugar la que le parezca «más sencilla» de contrastar.

Con este enfoque pragmático, la sencillez depende de varios factores: el tipo de instrumental de que se disponga, la financiación del experimento, el tiempo disponible, los conocimientos del científico y de sus colaboradores... Por otra parte, una teoría puede parecerle sencilla a un científico porque comprende su desarrollo matemático, o parecerle complicada justamente por la razón contraria. Una teoría puede admitir expresión matemática sencilla, pero predecir fenómenos complejos de verificar, o puede ser de expresión complicada y predecir en cambio resultados fácilmente comprobables. Como ya señalaba Charles Peirce, puede haber circunstancias en que resulte más barato poner a prueba en primer lugar la menos plausible de las diversas hipótesis.

Evidentemente, todos estos factores subjetivos o de orden práctico tienen importancia en investigación, pero dejan intacto el corazón del misterio. La cuestión profunda es: ¿Por qué causa, en igualdad de las restantes circunstancias, es normalmente la hipótesis más sencilla la mejor encaminada, es decir, la que más probablemente se verá confirmada en la investigación futura?

Fijémonos en un ejemplo «sencillo» de investigación científica. Un físico que está buscando una relación funcional entre dos variables va registrando sus observaciones como puntos de un gráfico. No sólo dibujará la línea más sencilla que se ajuste mejor a los datos observados, sino que llega a anteponer el postulado de simplicidad a los valores realmente observados. Cuando los puntos de la gráfica caen en la cercanía de una recta, nuestro físico no traza una línea sinuosa que contenga a todos los puntos. Supondrá, por el contrario, que sus observaciones han sufrido sesgos por una u otra causa, y trazará una línea recta, que posiblemente no pase por ninguno de los puntos observados, y conjeturará que la función es una sencilla proporcionalidad, como por ejemplo $x = 2y$ (véase la Figura 73).

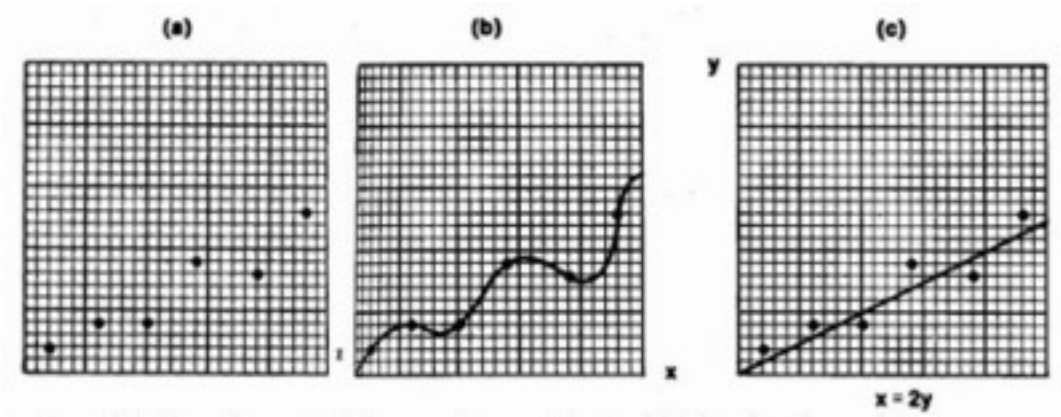


Figura 73. Datos observados (a), una posible curva funcional (b), función más verosímil

Si esta aproximación no diese predicciones suficientemente exactas de nuevas observaciones, el científico ensayaría leyes de grado superior; ajustaría, pongamos por caso, una parábola o una hipérbola a la nube de puntos. El meollo de la cuestión es que, a igualdad de las restantes circunstancias, cuanto más sencilla sea la curva mayor es su probabilidad de ser correcta. El número de leyes fundamentales expresables mediante ecuaciones de grados pequeños es verdaderamente sorprendente. No menos conocida es la preferencia que la Naturaleza parece mostrar por los extremos (valores máximos o mínimos), quizás porque en tales casos la derivada es nula.

En ocasiones, incluso al evaluar teorías de máxima complejidad y nivel científico, como las teorías de la relatividad o de partículas elementales, se antepone la presunción de simplicidad a los datos. El hecho de que una teoría sea bella y simple y posea gran poder explicativo, dice a veces más en su favor que lo que puedan decir en contra suya experimentos anteriores que parezcan falsearla.

Y de esta forma se suscita una de las cuestiones más paradójicas de la filosofía de la ciencia: ¿Cómo definir esta particular noción de simplicidad, esa simplicidad que contribuye a la probabilidad de que la teoría sea verdadera? De ser posible definirla ¿podrá ser medida? La actitud de los científicos con respecto a estas cuestiones suele ser desdeñosa. Prefieren juzgar intuitivamente la sencillez o complejidad de sus teorías, sin preocuparse de analizar exactamente su naturaleza. Es concebible, sin embargo, que algún día se pueda disponer de un método de medición de la

simplicidad que tenga verdadero valor práctico. Imaginemos que coexistan dos teorías capaces de explicar todos los hechos conocidos acerca de las partículas fundamentales. Supongamos iguales sus capacidades de predicción de nuevos fenómenos, pero diferentes las observaciones predichas. Es imposible que las dos teorías sean ambas verdaderas. Tal vez sean ambas falsas. Para ponerlas a prueba es necesario realizar experimentos independientes, cada uno de 100 millones de dólares. Si la simplicidad de las teorías influyese en su probabilidad de ser verdaderas, sería una ventaja evidente el poder medir el grado de simplicidad de cada una, y poner a prueba en primer lugar la más sencilla.

Hoy por hoy nadie sabe ni medir este tipo de simplicidad, ni tampoco definirla con precisión. Sin duda es necesario hacer mínimo alguno de los componentes de la situación, ¿pero cuál? De nada vale contar el número de términos de la formulación matemática de la teoría, pues tal número depende de la notación. Una misma fórmula puede requerir diez términos en una notación, y sólo tres en otra. La famosa ecuación $E = mc^2$ de Einstein puede parecer sencilla, pero en realidad cada término es abreviatura de nociones que a su vez son expresables mediante fórmulas donde intervienen otros conceptos. Lo mismo sucede en matemática pura. La única forma de expresar el número «pi» mediante números enteros es corno límite de una serie infinita; al escribir □ la serie completa queda comprimida en un único símbolo. Tampoco vamos por buen camino buscando hacer mínimo el grado de los términos. Para empezar, una función de primer grado como $x = 2y$ tiene por gráfica una línea recta, pero sólo en coordenadas cartesianas. En coordenadas polares la gráfica es una espiral. Por otra parte, cuando las ecuaciones no sean polinómicas, la pretensión de rebajar el grado de las expresiones carece de sentido. E incluso cuando sean polinómicas, ¿deberíamos considerar que una ecuación como $w = 13x + 23y + 132z$ es «más sencilla» que la $x = y^2$?

La noción de simplicidad sigue siendo de lo más vago incluso en la comparación de figuras geométricas. En una de las historietas de la serie B. C. (*Antes de Cristo*), de Johnny Hart, un cavernícola inventa una rueda cuadrada. Como la rueda produce un salto cada vez que pivota sobre uno de sus ángulos, el paleoingeniero se da cuenta de que tiene demasiadas esquinas, y retornando al tablero de diseño, inventa otra rueda «más sencilla», esta vez, triangular. Qué duda cabe que el número de

vértices y de saltos se ha «simplificado», pero el inventor está ahora más lejos que antes de la rueda verdaderamente simple, la circular, que no tiene vértice alguno. ¿O tal vez deberíamos decir que la rueda circular es la más compleja, porque es un polígono con una infinidad de lados? La verdad es que un triángulo equilátero es más sencillo que un cuadrado, en el sentido de que tiene menos lados y ángulos. Más, por otra parte, el cuadrado es más sencillo que el triángulo si nos fijamos en la fórmula que expresa el área en función del lado en uno y otro caso.

Entre los muchos métodos propuestos para medir la simplicidad de una hipótesis, uno de los más atractivos consiste en contar el número de nociones primitivas que contiene. Es lástima, pero también aquí terminamos en un callejón sin salida. Podemos reducir artificialmente el número de nociones, combinándolas entre sí. Así lo ha hecho ver claramente Nelson Goodman con su famosa paradoja «verzul», sobre la cual se han escrito docenas de artículos especializados. Fijémonos en una sencilla ley: «Todas las esmeraldas son verdes». Ahora definimos el concepto de «verzul», a saber, la propiedad de ser verde en observaciones anteriores al día 1 de enero de 2001, pongamos por caso, y azul en las observaciones posteriores a esa fecha. Enunciemos una segunda ley: «Todas las esmeraldas son verzules».

Ambas leyes tienen el mismo número de conceptos. Ambas tienen el mismo «contenido empírico» (explican todas las observaciones). Ambas tienen idéntica capacidad de predicción. Para falsar cualquiera de ellas es suficiente una única observación, realizada en algún momento del futuro, de una esmeralda cuyo color no se ajuste al predicho. Todo el mundo apoya la primera ley, porque «verde» es más simple que «verzul», al no requerir nuevas teorías que expliquen el súbito cambio de color que habrían de sufrir las esmeraldas el 1 de enero de 2001. A pesar de que Goodman ha trabajado más que nadie en esta reducida faceta del concepto de simplicidad, se encuentra lejos todavía de poder enunciar resultados definitivos, y no hablemos ya del problema, mucho más difícil, de dar una medida global de la simplicidad de una ley o una teoría. ¡En ciencia, la noción de simplicidad dista de ser simple! Puede suceder que no exista una medida sencilla del concepto de simplicidad, sino que sea preciso dar muchos tipos distintos de medidas, que intervendrían todos en la evaluación final y compleja de la ley o teoría.

Lo sorprendente es que incluso en matemática pura se presentan dificultades parecidas. El método que siguen los matemáticos para dar con nuevos teoremas no se diferencia demasiado del empleado por los físicos para descubrir nuevas leyes. Ambos realizan ensayos. Al ir dibujando más o menos al azar cuadriláteros convexos, lo que no es sino una forma de experimentación con modelos físicos, puede que un geómetra descubra que al construir exteriormente cuadrados sobre los lados del cuadrilátero, y unir los centros de los cuadrados opuestos, los dos segmentos resultantes son iguales y perpendiculares (véase la Figura 74).

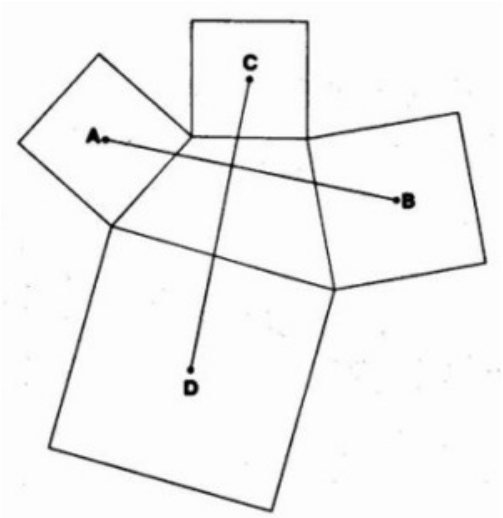


Figura 74. Un teorema geométrico "sencillo"

Ensayando con cuadriláteros de distintas formas va observando que siempre se produce el mismo resultado. Empieza entonces a ventear un teorema. Al igual que un físico, opta por la hipótesis más sencilla. Por ejemplo, no se le ocurriría empezar comprobando la conjetura de que la proporción de los segmentos es de 1 a 1,00007 y de que en la intersección se forman ángulos de 89 y 91 grados. Lo primero que comprueba es que los segmentos son iguales y forman ángulos rectos, hipótesis mucho más sencilla. Su «comprobación», a diferencia de la del físico, consiste en buscar una demostración deductiva, que establezca la hipótesis con seguridad.

La teoría combinatoria abunda en ejemplos parecidos, donde por lo general la hipótesis más sencilla suele ser la más probable. Empero, y al igual que en el mundo físico, tampoco faltan las sorpresas. Fijémonos en el siguiente problema,

descubierto por Leo Moser. Tomamos un círculo, y en su circunferencia señalamos arbitrariamente dos o más puntos. Cada par de éstos se conecta por un segmento rectilíneo. Dados *n* puntos, ¿cuál es el máximo número de regiones en que quedará dividido el círculo? Vemos en la Figura 75 las soluciones correspondientes a dos, tres y cuatro puntos. Dejamos al cuidado del lector descubrir las soluciones para cinco y seis puntos, y si es posible, de descubrir una fórmula general.

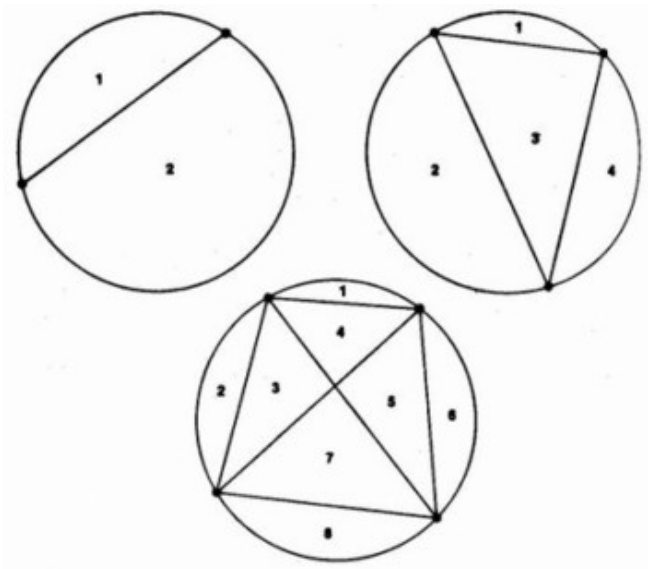


Figura 75. Un problema de combinatoria

Apéndice

El precioso teorema relativo a los cuadrados construidos sobre los lados de un cuadrilátero convexo se conoce por teorema de Von Aubel. Muchos lectores, desencantados al ver que no daba yo ninguna demostración, enviaron algunas excelentes de cosecha propia. Lamento no disponer aquí de espacio para presentarlas. Puede verse una demostración sencilla, vectorial, en «Von Aubel's Quadrilateral Theorem», por Paul J. Kelly, en *Mathematics Magazine*, enero de 1966, pp. 36-37. Hay otra demostración de distinta naturaleza, basada en operaciones de simetría, en *Geometric Transformation*, por I. M. Yaglom, *Random House*, 1962, pp. 95-96, problema 24b.

Como Kelly hace ver, el teorema puede generalizarse en tres direcciones, que lo hacen todavía más hermoso:

1. No es preciso que el cuadrilátero sea convexo. Los segmentos que conectan los centros de cuadrados opuestos quizá no se corten, pero siguen siendo igual de largos y perpendiculares.
2. Tres cualesquiera, o incluso los cuatro vértices del cuadrilátero pueden estar alineados. En el primer caso el cuadrilátero degenera en un triángulo, uno de cuyos lados contiene un «vértice»; en el segundo caso, degenera en un segmento que contiene dos «vértices» en su interior.
3. Uno de los lados del cuadrilátero puede tener longitud nula. De esta forma dos vértices quedan confundidos en un solo punto, que puede ser tratado como centro de un cuadrado de lado cero.
La segunda y tercera generalizaciones fueron descubiertas por un lector, W. Nelson Goodwin, Jr., quien trazó los cuatro ejemplos de la Figura 76.

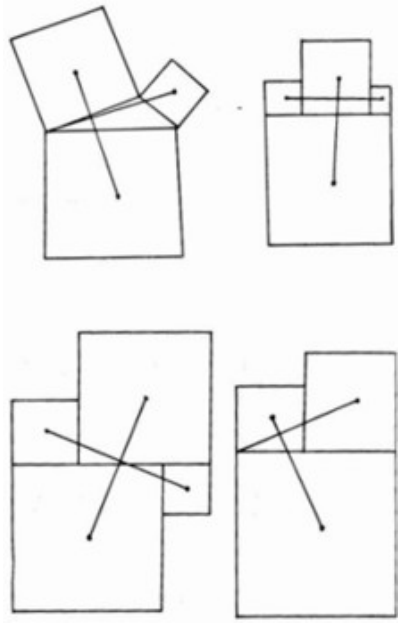


Figura 76. Curiosas generalizaciones del teorema de Von Aubel

Observemos que el teorema continúa siendo verdadero si los lados opuestos de un cuadrilátero se contraen hasta reducirse a un punto. La recta resultante puede entonces ser considerada como una de las líneas que conectan los puntos medios de cuadrados opuestos de lado cero, que es evidentemente igual y perpendicular al

segmento que une los puntos medios de dos cuadrados trazados sobre lados opuestos de la recta inicial.

Soluciones

El problema de Leo Moser, que podríamos llamar de «división de una tarta», muestra cuan fácilmente la inducción empírica puede torcerse al experimentar en matemática pura. El máximo número de regiones en que puede dividirse el círculo uniendo todos los pares de puntos por líneas rectas es de 1, 2, 4, 8, 16.... correspondientes a uno, dos, tres, cuatro y cinco puntos convenientemente situados sobre la circunferencia. Nada sería más natural que inducir que esta progresión geométrica continuará indefinidamente, y que el número máximo de regiones determinadas por *n* puntos es 2n-1. Desdichadamente, esta fórmula falla para todos los números n mayores que 5.

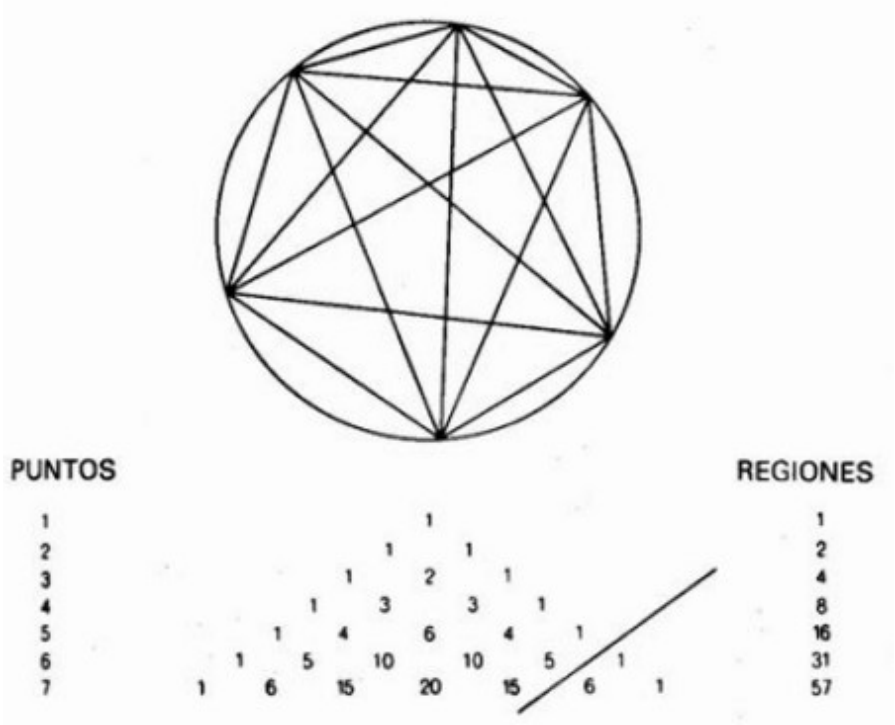


Figura 77. Solución del problema de Leo Moser

En la Figura 77 vemos que seis puntos dan un máximo de 31 regiones, y no 32, como podríamos esperar. La fórmula correcta es:

$$n + \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}$$

La expresión

$$\binom{m}{k}$$

se llama «número combinatorio», y denota el número de formas en que pueden seleccionarse colecciones de *k* objetos de un colectivo formado por *m* objetos. Su valor es

$m! / k! (m - k)$

Moser ha hecho notar que la fórmula da la suma de las filas de números situados a la izquierda de la línea oblicua trazada en el triángulo de Pascal que vemos en la ilustración. Desarrollada completamente, la fórmula es

$$\frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$$

Al ir dando a *n* valores enteros positivos la fórmula engendra la sucesión: 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, 256, 386, 562, ... El problema ilustra deliciosamente la máxima de Whitehead sobre la búsqueda de la sencillez.

No he podido averiguar dónde ni cuándo Moser publicó por primera vez este problema, pero en una carta suya me dice que debió ser hacia 1950, en *Mathematics Magazine*. Desde aquella fecha ha aparecido en numerosas publicaciones y libros, resuelto de diversas formas. En la bibliografía del capítulo se da una lista (incompleta) de referencias.

Capítulo 15
La mesa giratoria y otros problemas

1. La mesa giratoria redonda

En 1969, tras 10 semanas de áspera porfía, las delegaciones encargadas de negociar la paz en Vietnam llegaron por fin a convenir la forma de la mesa de conferencias: un círculo donde habrían de acomodarse, equidistantes, las 24 personas. Aunque los asientos estaban reservados mediante tarjetas nominales, en una ocasión se produjo tal revuelo que los 24 negociadores tomaron asiento completamente al azar. Se descubrió entonces que ninguno ocupaba el lugar que le correspondía. Ahora, independientemente de cómo hayan tomado asiento, ¿será posible que girando la mesa al menos dos personas queden sentadas frente a la tarjeta que los identifica?

El problema es mucho más difícil si sólo hay una persona que haya encontrado su asiento. En ese caso, ¿será posible girar la mesa para que al menos dos personas queden situadas simultáneamente frente a su tarjeta?

2. Mate al primer jaque

En junio de 1916, una revista de ajedrez, *The British Chess Magazine* (vol. 36, nº 426), daba cuenta de que un aficionado americano, Frank Hopkins, había inventado una variante del ajedrez, que llamaba de «jaque único». El juego sigue exactamente las mismas reglas que el ajedrez ordinario, salvo en que la victoria es del primer jugador que consiga dar jaque (no necesariamente jaque mate) al rey contrario. La revista, que mencionaba como fuente un articulo de *The Brooklyn Daily Eagle*, daba cuenta de que «la sospecha de que las blancas tenían asegurada la victoria se convirtió en certeza», al declarar un día el gran maestro Frank J. Marshall que «podía reventar el nuevo juego». Hopkins no quedó convencido hasta que Marshall le dio una rápida paliza, moviendo solamente los dos caballos blancos. No se explicaba la estrategia de Marshall, salvo la jugada de apertura, ni la reseña del incidente daba tampoco el número de jugadas que tardó en producirse el jaque fatal.

Desde 1916, la idea de «mate al primer jaque» parece habérsele ocurrido a muchos aficionados. La primera noticia que tuve de él fue a través de Solomon W. Golomb, quien lo conocía como «presto chess», nombre que le puso David L. Silverman al serle explicado el juego por otro reinventor, ya en 1965. Antes, a fines de los 40, había sido puesto brevemente en circulación por un grupo de estudiantes de matemáticas de la Universidad de Princeton. Uno de ellos, William H. Mills, descubrió entonces la que sin duda debió ser estrategia de Marshall: una táctica mediante la cual las blancas, moviendo solamente los caballos, podían vencer lo más tarde en la quinta jugada. En 1969, Mills y George Soules descubrieron conjuntamente otras tácticas vencedoras de cinco jugadas con otras piezas. ¿Sabría usted repetir la hazaña de Marshall, resolviendo el problema propuesto en la Figura 78? ¿Cómo pueden lograr las blancas dar jaque al rey negro, moviendo solamente los caballos, lo más tarde en su quinto movimiento?

Figura 78. Las blancas mueven los caballos y logran dar jaque en cinco

Se han realizado diversos intentos para darle más interés al juego, añadiendo reglas. El propio Hopkins propuso comenzar la partida con los peones de ambos jugadores en la tercera fila en vez de la segunda. Sidney Sackson, quien me informó del artículo de 1916, sugiere que sea vencedor el primero en dar un número especificado de jaques, por ejemplo, entre cinco y diez, según la duración que se desee para la partida. Ignoro si estas propuestas consiguen suprimir eficazmente la ventaja de las blancas.

3. Juego de adivinación de palabras

Hacia 1965, Anatol W. Holt, matemático a quien le gusta inventar juegos nuevos, presentó el siguiente: Dos personas piensan cada una en una palabra «objetivo», ambas con igual número de letras. Los novatos deben comenzar con palabras de tres letras, e ir progresivamente aumentando su longitud conforme vayan adquiriendo más habilidad. Los jugadores van diciendo por turno «palabras de prueba» de la longitud acordada; su contrario debe responder diciendo si el número de aciertos es par o impar. El primero que descubre la palabra de su adversario gana la partida. Para mostrar que es posible determinar la palabra mediante análisis lógico, sin necesidad de tanteos, tomemos el siguiente ejemplo, construido sobre el modelo de Holt:

Número de aciertos	***Par***	***Impar***
	FIE	PIE
	RIE	SON
	SOL	RAS

Las seis palabras corresponden a pruebas de un mismo jugador, y si conociéramos la palabra objetivo veríamos que comparándola con la lista de número de aciertos par, cada palabra de esta lista tiene un número par de letras (posiblemente, cero) iguales y en igual posición que la palabra buscada; mientras que en la lista impar sucedería así en número impar de lugares. Descubra la palabra objetivo.

4. El triple anillo

El siguiente problema apareció en Problematical Recreations nº 7, cuaderno de rompecabezas y pasatiempos que anualmente publica *Litton Industries*, de Beverly Hills, California. Un hombre que está tomándose una cerveza en la barra de un bar coloca tres veces su vaso sobre el mostrador, dibujando así los tres círculos que podemos ver en la Figura 79.

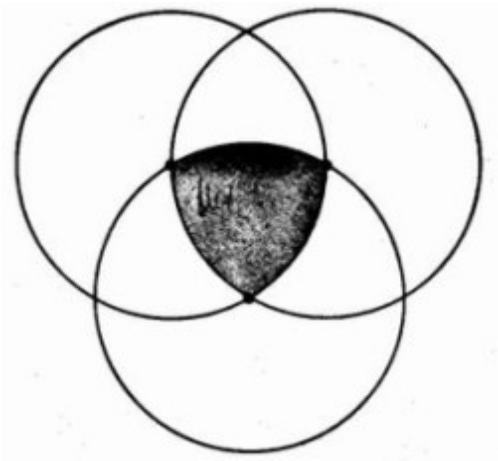


Figura 79. ¿Cuánto mide la porción sombreada de círculo?

Al hacerlo presta atención a que cada círculo pase por el centro de los otros dos. El encargado del bar opina que la zona de superposición de los tres círculos (sombreada en la figura) ocupa menos de la cuarta parte del área de un círculo. En cambio, el cliente cree saber que esta superficie es más de un cuarto de círculo.
El problema puede resolverse por las malas, hallando el área del triángulo equilátero inscrito en la región sombreada y sumándole luego las áreas de los tres segmentos circulares sobrantes por cada lado del triángulo. Pero un lector de mi sección, Tad Dunne, me envió una preciosa solución gráfica, donde la respuesta «salta a la vista», y que no requiere fórmulas geométricas ni apenas nada de aritmética, aunque sí un motivo decorativo reiterado. ¿Podrá redescubrirlo el lector?

5. Un calendario con dos cubos

En un escaparate de la *Grand Central Terminal* de Nueva York vi un insólito calendario de sobremesa (Figura 80).

Figura 80. ¿Con qué cifra están marcadas las caras no visibles de estos cubos?

Para señalar el día se colocan los cubos de manera que sus caras frontales den la fecha. En cada cubo, cada una de las caras porta un número de 0 a 9, distribuidos con tanto acierto, que siempre podemos construir las fechas 01, 02, 03... 31, disponiéndolos adecuadamente.

No debería costarle demasiado al lector descubrir los cuatro dígitos no visibles en el cubo de la izquierda, y los tres ocultos en el situado a la derecha, aunque la verdad es que tiene un poco más de miga de lo que parece.

6. A salto de caballo, y sin cruces

En el *Journal of Recreational Mathematics* de julio de 1968, L. D. Yarbrough presenta una nueva variante del clásico problema de recorrer a salto de caballo los escaques de un damero. Además de la regla que prohíbe al caballo visitar dos veces una misma casilla (excepto en la jugada final, donde a veces se permite al caballo retornar al punto de partida) se impone ahora la regla de que la trayectoria del caballo no debe cortarse a sí misma. (Por trayectoria se entiende una línea quebrada que va conectando los centros de las casillas inicial y final de cada salto.) Se plantea una cuestión natural: ¿cuáles son las trayectorias sin cruces de longitud máxima que pueden trazarse en dameros de distintos tamaños?

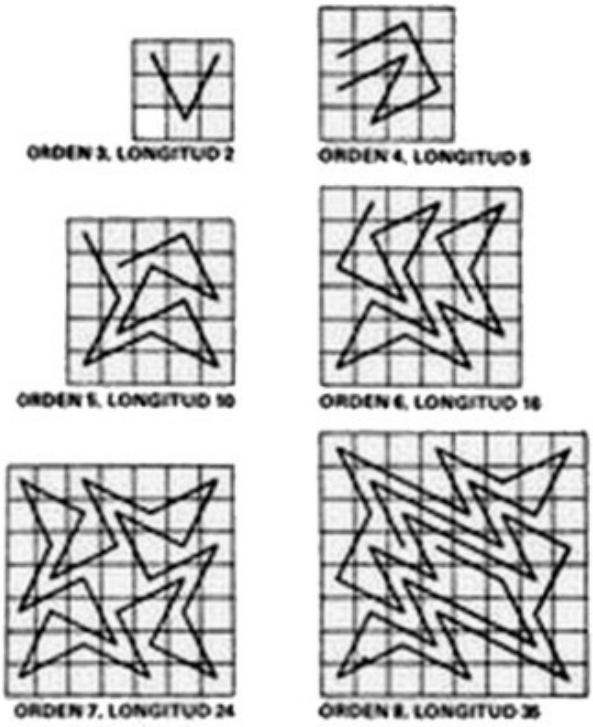


Figura 81. Hallar otro recorrido más largo en el tablero de orden 6

En la Figura 81 se reproducen algunas muestras de trayectorias sin cruces que Yarbrough ha descubierto para cuadrados de órdenes 3 a 8. El tablero de orden 7 presenta particular interés. Pocas veces los caminos de longitud máxima son cerrados, pero éste es una rara excepción, pues presenta además cuádruple simetría de rotación.

La búsqueda de recorridos máximos, sin cruces, a salto de caballo, atrajo la atención de Donald E. Knuth, quien preparó un programa de ordenador con el cual determinó, entre otras cosas, todos los recorridos sin cruces y de longitud máxima en tableros cuadrados de orden menor o igual que 8. Como es habitual, las trayectorias congruentes (es decir, que podrían quedar superpuestas por medio de giros o simetrías) se consideran idénticas, El ordenador descubrió dos recorridos máximos en el tablero de orden 3, cinco en el de orden 4, cuatro para el de orden 5, uno en el de orden 6, catorce en el de orden 7, y cuatro en el de orden 8, que es el ordinario de ajedrez.

Llama mucho la atención la unicidad de la solución en el tablero de orden 6, tablero que nos plantea además un problema, pues tan sólo aquí se equivocó Yarbrough al

buscar recorridos de longitud máxima. Su recorrido tiene 16 movimientos, pero en este tablero es posible otro de 17, sin cruces por supuesto. Se invita al lector a igualar con su ingenio la fuerza bruta del ordenador, y que intente descubrir la única trayectoria de 17 pasos.

7. Dos problemas de urnas

En teoría de probabilidades es frecuente ilustrar los teoremas con ejemplos sobre objetos idénticos, aunque de distinto color, que son extraídos de urnas, cajas, bolsas, etc. Incluso los más sencillos de estos problemas pueden resultar difíciles de analizar claramente. Recordemos, por ejemplo, el quinto de los *Pillow Problems* de Lewis Carroll. «Una bola contenida en una bolsa puede ser o bien blanca, o bien negra. Se añade a la bolsa una bola blanca, se agita la bolsa, y se extrae al azar una bola, que resulta blanca. ¿Qué probabilidad hay ahora de que al extraer la otra bola, también ésta resulte ser blanca?»

«A primera vista», nos dice Carroll en su análisis de la solución, «podría parecer que como el estado de la bolsa después de efectuadas estas operaciones tiene que ser necesariamente idéntico al que tuviera antes de introducir la bola blanca, la probabilidad sería ahora idéntica a la probabilidad inicial, es decir, 1/2. Pero ésto es un error».

Carroll demuestra entonces que la probabilidad de que la bola aún contenida en la bolsa sea blanca es 2/3 en realidad. Su demostración toma vuelos demasiado altos para exponerlos aquí, pero un lector de Chicago, Howard Ellis, ha enviado otra más sencilla. Denotemos $B(1)$ y N a la bola, bien blanca, bien negra, que pudiera encontrarse inicialmente en la bolsa, y sea $B(2)$ la bola blanca añadida a ella. Tras sacar una bola blanca hay tres estados igualmente probables:

Dentro de la bolsa	***Fuera de la bolsa***
$B(1)$	$B(2)$
$B(2)$	$B(1)$
N	$B(2)$

En dos de estos tres estados queda dentro de la bolsa una bola blanca, por lo que la probabilidad de que la segunda extracción sea también de bola blanca es de 2/3.
En un reciente problema de esta misma clase, cuya solución es todavía más inesperada, se comienza con una bolsa que contiene cierto número, desconocido, de bolas blancas, y un número igualmente indeterminado de bolas negras. (Hay al menos una de cada color.) Se van extrayendo las bolas por el siguiente procedimiento. Se toma primero una al azar, se anota su color, y se desecha. Se saca una segunda bola. Si es del mismo color que la primera, se desecha también. Se extrae una tercera. Sí es del mismo color que las anteriores, se desecha. Proseguimos de esta forma, desechando las bolas extraídas mientras sean del color de la primera.
Cuando se extrae una bola de distinto color que la primera, se la devuelve a la bolsa, ésta se agita, y se vuelve a empezar el proceso.
Para dejarlo tan claro como el agua, he aquí una muestra de cómo podrían desarrollarse las diez primeras extracciones:

1. La primera bola es negra. Desecharla.
2. La siguiente es negra. Desecharla.
3. La siguiente es blanca. Devolverla a la bolsa y recomenzar.
4. La primera es negra. Desecharla.
5. La siguiente es blanca. Devolverla a su lugar, y recomenzar.
6. La primera bola es blanca. Desecharla.
7. La siguiente es blanca. Desecharla.
8. La siguiente es negra. Devolver a la bolsa y recomenzar.
9. La primera bola es negra. Desecharla.
10. La siguiente es blanca. Devolver a la bolsa y recomenzar.

Sorprendentemente, resulta que, sea cual fuere la proporción inicial de bolas blancas y negras, la probabilidad de que la última bola que quede en la bolsa sea negra es siempre la misma. ¿Qué valor tiene esta probabilidad?

8. Nueve a bote pronto

1. Disponiendo de un reloj de arena de 7 minutos, y de otro de 11 minutos, ¿cuál es el método más rápido para controlar la cocción de un huevo, que debe durar 15 minutos? (Debido a Karl Fulves).
2. Un viajante recorrió en coche 5.000 km, permutando regularmente las ruedas (incluida la de repuesto) para que todas sufrieran igual desgaste. Al terminar el viaje, ¿durante cuántos kilómetros ha sido utilizada cada rueda?
3. Una baraja francesa de 52 naipes es mezclada concienzudamente, cortada, y vuelta a apilar. Se extrae la carta superior del mazo, y se observa su color (rojo o negro). La carta se devuelve a su lugar, el mazo de naipes vuelve a ser cortado, y vuelve a observarse el color de la carta situada en lo alto. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos naipes sean del mismo color?
4. Hallar una base de numeración distinta de 10 en la que 121 sea cuadrado perfecto.
5. Construir ocho triángulos equiláteros trazando seis segmentos igual de largos.
6. Suponiendo que los ángulos no pueden ser trisecados mediante regla y compás, demostrar que ningún número de la progresión geométrica 2, 4, 8, 16, 32... puede ser múltiplo de 3. (Debido a Robert A. Weeks.)
7. Un granjero tiene 20 cerdos, 40 vacas, 60 caballos. Pero si llamamos caballos a las vacas, ¿cuántos caballos tendrá? (Debido a T. H. O'Beirne.)
8. Un griego nació el séptimo día del año 40 a. de C., y murió el séptimo día del 40 d. de C. ¿Cuántos años vivió?
9. Hay mujeres que contestan a todo con la verdad, otras que siempre mienten, y otras que alternan la verdad con la mentira. ¿Cómo se podría averiguar, con sólo dos preguntas cuya respuesta sea si o no, si una mujer es sincera a ultranza, mentirosa sin remedio, o si da una de cal y otra de arena?

Soluciones

1. Cuando un número par de personas toma asientos equidistantes frente a una mesa circular donde está indicada la posición que cada uno de ellos debe ocupar, siempre es posible hacer girar la mesa de forma que al menos dos de ellas queden situadas correctamente. Debemos distinguir dos casos iniciales.

a) Nadie está sentado en su lugar. La demostración es sencilla, y se basa en el llamado «principio de encasillamiento», a saber, que si se reparten n objetos en n - 1 casillas, al menos una casilla quedará ocupada por más de un objeto. Si a la mesa se acomodan 24 personas, todas ellas fuera de lugar, es evidente que girando la mesa podremos ir haciendo que cada una de ellas quede situada frente a su tarjeta. Ahora bien, la mesa solo puede tener 23 posiciones distintas de la inicial, y como hay 24 personas, en alguna de éstas 23 posiciones habrá dos (cuando menos) situadas correctamente. La demostración es válida tanto si el número de asientos es par como si es impar.

b) Una de las personas se encuentra en su sitio. La tarea consiste en demostrar que podemos girar la mesa y conseguir que al menos dos personas se encuentren correctamente colocadas. Hay demostraciones breves, pero estas demostraciones son de carácter técnico y requieren además notaciones especiales. La que daremos aquí, aunque más larga, es fácil de comprender, y es refundición de más de una docena de razonamientos parecidos enviados por los lectores.

Nuestra estrategia se basa en razonar por *reductio ad absurdum*. Supondremos primero que no es posible girar la mesa de forma que dos personas queden en sus lugares correctos, y mostraremos luego que esta hipótesis conduce a contradicción.

Si la hipótesis fuese correcta, en ninguna posición de la mesa podrían estar mal colocadas todas las personas, porque entonces estaríamos en el caso ya discutido antes, resuelto por el principio de encasillamiento. La mesa tiene 24 posiciones, y hay 24 personas; por consiguiente, en cada una de las posiciones de la mesa hay exactamente una persona correctamente situada.

Supongamos que sea Anderson. A cada uno de los demás podemos asignarle un número de «desplazamiento», que exprese cuántos lugares hay desde su asiento correcto hasta él, contando en sentido horario. Habrá una persona desplazada un asiento, otra dos, otra tres, y así sucesivamente, hasta una desplazada 23 asientos. No puede haber dos personas con números de desplazamiento iguales, porque en tal caso, girando la mesa adecuadamente ambas quedarían frente a sus tarjetas, posibilidad descartada por hipótesis.

Fijémonos en Smith, que está mal situado. Vamos contando sillas en sentido antihorario a partir de él hasta llegar al lugar situado frente a la tarjeta de Smith. La

cuenta da, evidentemente, el número de desplazamiento de Smith. Fijémonos ahora en Jones, sentado donde debería estarlo Smith. Seguimos contando en sentido antihorario hasta llegar a la tarjeta de Jones. Como antes, la nueva cuenta es el número de desplazamiento de Jones. Sentado frente a la tarjeta de Jones está Robinson. Contamos en sentido antihorario hasta la tarjeta de Robinson, y así sucesivamente. Llegará un momento en que la cuenta termine en Smith. En efecto, si Smith y Jones se encontrasen uno en el asiento de otro y recíprocamente, habríamos regresado a Smith tras un cielo de dos personas, que nos habría hecho dar exactamente una vuelta a la mesa. Si Smith, Jones y Robinson estuvieran ocupando unos los asientos de otros, retornaríamos a Smith tras un ciclo de tres cuentas. El ciclo puede hacer intervenir un número cualquiera de personas, de 2 a 23 (no puede pasar también por Anderson, por estar éste correctamente situado), pero al cabo el recuento retornará a su punto de comienzo, tras dar un número entero de vueltas a la mesa. Por tanto, la suma de todos los números de desplazamiento del ciclo deberá ser igual a 0 módulo 24, es decir, la suma deberá ser múltiplo entero de 24.

Si el ciclo que arranca de Smith no hiciera intervenir a todas las personas incorrectamente situadas, se elige otra persona que no esté ocupando su asiento y se repite el mismo procedimiento anterior. Al igual que antes, el recuento deberá terminar en el punto de donde partió, tras cierto número entero de vueltas en torno a la mesa. Por consiguiente, también la suma de desplazamientos de este ciclo será múltiplo de 24. Efectuando tantos ciclos como sea necesario, llegará un momento en que habremos contado los desplazamientos de todos los asistentes. Y puesto que la cuenta de cada ciclo es múltiplo de 24, la suma de cuentas de todos los ciclos será también múltiplo de 24. O sea, hemos demostrado que la suma de todos los números de desplazamiento es necesariamente múltiplo de 24.

Buscaremos ahora la contradicción. Los desplazamientos son 0, 1, 2, 3... 23. La suma de esta sucesión es de 276, que no es múltiplo de 24. Esta contradicción nos obliga a abandonar nuestra hipótesis inicial, es decir, a admitir que al menos dos personas tienen el mismo número de desplazamiento.

La demostración anterior puede generalizarse a mesas cualesquiera con número par de asientos. La suma de $0 + 1 + 2 + 3 + ... + n$ es

$n\,(n + 1)/2$

que solamente es múltiplo de n cuando n es impar. Por consiguiente, para valores impares de n la demostración anterior falla.

George Rybicki resolvió el problema general de la siguiente forma. Comenzamos suponiendo lo contrario de lo que deseamos demostrar, a saber, que es posible situar las personas en la mesa de forma que nunca se consiga que dos queden correctamente situadas, cualquiera que sea la forma en que se haga girar la mesa. Sea n el número de personas, y sustituyamos sus nombres por los enteros 0 a n - 1, de «tal forma que al ir dando la vuelta a la mesa las tarjetas que reservan su plaza queden correlativamente numeradas. Si el delegado de número d se sentaba inicialmente frente a una tarjeta ahora marcada p, para que quede correctamente situado habrá que girar la mesa r lugares, siendo $r = p - d$, salvo si este número es negativo, en cuyo caso $r = p - d + n$. La colección de valores de d (y de p) correspondientes a los delegados es, desde luego, la sucesión de enteros de 0 a n - 1; y lo mismo sucede con la colección de valores de r, pues de lo contrario habría dos personas correctamente situadas al mismo tiempo. Sumando las igualdades anteriores, una por delegado, resulta $S = S - S + nk$, donde k es un número entero (posiblemente igual a 0 o negativo), y donde $S = n(n - 1)/2$. Despejando n de esta ecuación resulta que $n = 2k + 1$, el número de asistentes es impar».

Rybicki añade: «En realidad, resolví este problema hace algunos años, en relación con otro problema distinto en apariencia, pero totalmente equivalente, el de situar ocho reinas de ajedrez sobre un tablero cilíndrico sin que se ataquen, donde sólo se permite amenazar oblicuamente según una de las dos inclinaciones. Demostré entonces que el problema es insoluble en tableros de orden par; el razonamiento recién expuesto resulta de traducir, adaptándola a la mesa de conferencias, aquella demostración. Incidentalmente, esta demostración se simplifica un poco si se permite manejar congruencias módulo n.»

También Donald E. Knuth ha hecho notar la equivalencia de los problemas de la mesa giratoria y de las reinas no mutuamente amenazadas, y cita una solución de hace ya tiempo, debida a Georg Pólya. Varios lectores me han hecho ver, asimismo,

que cuando el número de personas es impar hay una forma sencilla de colocarlas a la mesa, que hace imposible situar correctamente a más de una, se gire la mesa como se quiera. Consiste en sentarlas en orden contrario al orden señalado en sus tarjetas.

2. ¿Cómo pueden arreglárselas las blancas para ganar una partida de «mate al primer jaque» moviendo solamente los caballos, y en no más de cinco jugadas?

La apertura tiene que ser forzosamente C (caballo) 3AD. Como de esta forma se amenaza con dar jaque en dos jugadas más (por distintos caminos), las negras se ven forzadas a avanzar un peón que conceda así movilidad al rey. Si avanzan el peón de dama, la jugada blanca C5C obliga al rey negro a R2D. Pero entonces, al jugar las blancas C3AR, conseguirán dar jaque en la cuarta jugada con uno de los dos caballos. Si las negras abren un peón de alfil-rey, C5C permite dar jaque en la jugada tercera. Por consiguiente, las negras deben adelantar su peón de rey. Si avanzase dos escaques, al jugar las blancas C5D el rey negro queda inmovilizado, y las blancas ganan en la tercera jugada. Así. pues, parece que la única buena jugada de las negras es P3R.

La segunda jugada de las blancas será entonces C4R. El rey negro queda así obligado a jugar R2R. La tercera jugada de las blancas, C3AR, puede ser afrontada de muchas maneras, pero ninguna es capaz de impedir la victoria blanca lo más tarde en su quinta jugada. Si las negras intentan jugadas como P3D, P3AR, D1R, P4D, P4AD o C3AR, las blancas responden jugando C4D, y ganan en la siguiente jugada. Si las negras ensayan P4R, P4AD, o C3AD, el próximo paso de las blancas es C4TR, que le da la victoria en la siguiente.

En 1969, William H. Mills descubrió que las blancas podían también dar jaque en cinco abriendo C3TD. Las negras tienen entonces que avanzar su peón de rey uno o dos cuadros. Entonces, C5C obliga al rey negro a jugar R2R. La tercera jugada blanca, P4R va seguida de D3A o D5T, según jueguen las negras en su tercer movimiento, y permite dar jaque en la quinta jugada.

Desde aquella fecha han sido descubiertas otras dos aperturas que permiten dar jaque en cinco, debidas a Mills y a Georg Soules. Son, respectivamente, P3R y P4R. Para casi todas las respuestas de las negras, jugando D4C se consigue dar jaque en tres. Si la segunda jugada negra fuese C3TR o P4TR, jugando D3A se logra dar

jaque en cuatro. Si la segunda jugada negra fuese P3R, las blancas jugarían D5T. Las negras tienen que responder P3CR. Pero entonces D5R liquida la cuestión. (De jugar las negras D2R, se contestaría con D x PAD; A2R se contesta con D7C; C2R, por D6A.) Si la segunda jugada de las negras es C3AR, al jugar las blancas C3TD el rey negro queda obligado a adelantar su peón de rey uno o dos escaques, y entonces C5C obliga a las negras a avanzar su rey, y D3A permite dar jaque a la siguiente.

David Silverman ha propuesto todavía otra forma de lograr que el ajedrez de jaque único conserve interés como juego. El ganador sería el primero capaz de dar jaque con una pieza que no pueda ser inmediatamente tomada por el contrario. Que yo tenga noticia, no se sabe de ninguna estrategia que pueda dar sistemáticamente la victoria a uno de los jugadores.

3. Para determinar la palabra objetivo marcaremos las seis palabras de prueba como sigue:

Par		Impar	
*P*1	FIE	*I*1	PIE
*P*2	RIE	*I*2	SON
*P*3	SOL	*I*3	RAS

La primera letra del objetivo no puede ser ni F ni R, pues de ser una de ellas *P*1 y *P*2 tendrían distinta paridad. Por otra parte, de *P*1 e *I*1 resulta que la primera letra del objetivo es F o es P, y como no puede ser F, necesariamente es P.

Como la primera letra de la palabra buscada es P, las palabras *P*1 y *P*2 deben contener 0 aciertos, e *I*1, contener 1. En efecto, de tener 2 aciertos en *P*1 y *P*2, *I*1 tendría 3, e *I*2 e *I*3 no tendrían ninguno, contrariamente a lo afirmado. Por consiguiente *I*2 e *I*3 tienen un acierto cada una. Además, *P*3 no puede tener dos aciertos, porque entonces *I*3 no tendría ninguno. Por consiguiente, el grupo SO de *I*2 es erróneo, y la N final, correcta. Ya es fácil deducir que la palabra objetivo es PAN.

4. Con tres circunferencias secantes, cada una de ellas pasando por el centro de las otras dos, podemos construir por repetición el motivo decorativo que vemos en la Figura 82.

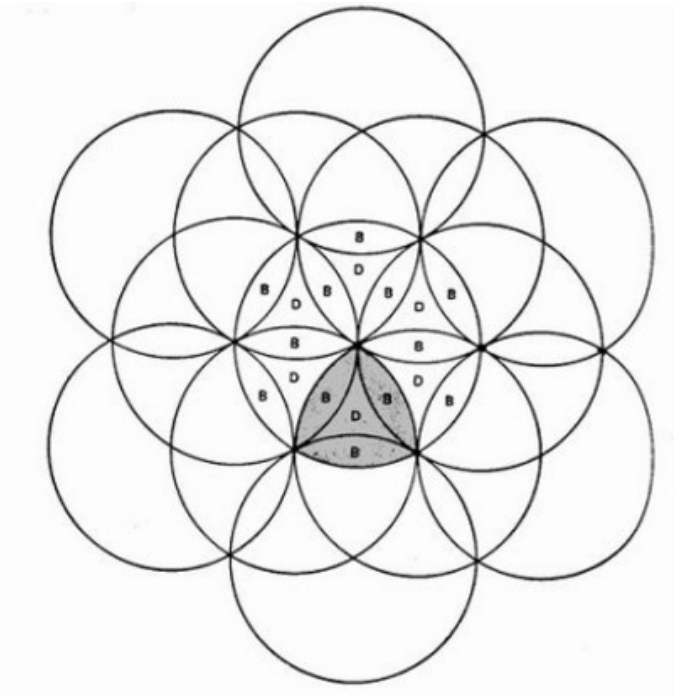


Figura 82. Solución al problema de los círculos secantes

Cada circunferencia puede descomponerse en seis piezas en forma de delta (D) y 12 «bananas» (B). La superficie común a tres círculos mutuamente superpuestos (sombreada en la ilustración) está formada por tres bananas y una delta, y por consiguiente, es inferior a la cuarta parte de un círculo, de la que difiere en media delta. Calculando la zona de mutuo recubrimiento vemos que es algo más del 22 por 100 de la superficie del círculo.

5. Cada cubo debe portar un 0, un 1, y un 2. De esta suerte quedan solamente seis caras en total para dar cabida a las siete cifras restantes. Afortunadamente, podemos ahorrarnos una cara usando un mismo signo para el 6 y el 9, y volteando adecuadamente el cubo. En la figura, el cubo de la derecha exhibe las cifras 3, 4, 5, y por consiguiente, en sus caras ocultas debe portar 0, 1 y 2. En el cubo de la izquierda podemos ver 1 y 2, así que sus caras no visibles deben ser 0, 6 (ó 9), 7 y 8.

John S. Singleton me escribió desde Inglaterra, indicándome que había patentado el calendario de dos dados en 1957/8 (Patente británica nº 831.572), pero que dejó de renovar la patente en 1965. Puede verse una variante del problema, donde con tres cubos basta para dar las iniciales de todos los meses del año, en la sección de Juegos Matemáticos de INVESTIGACION Y CIENCIA de marzo de 1978.

6. La Figura 83 muestra el único recorrido de caballo que no se corta a sí mismo y que es de longitud máxima entre los que poseen esta propiedad, para un tablero de orden 6.

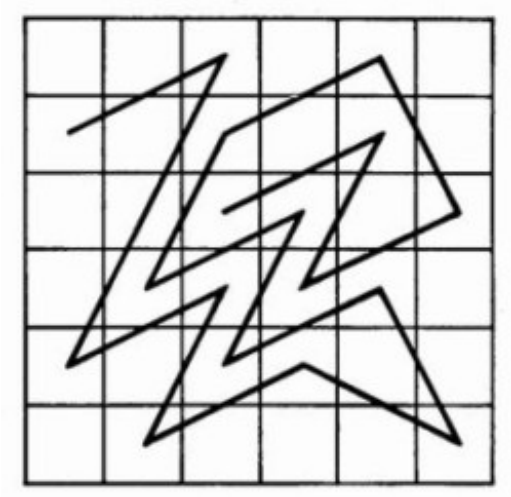


Figura 83. Recorrido del caballo de longitud máxima en tableros de orden 6

Podemos ver recorridos semejantes en tableros cuadrados de dimensión mayor, y en tableros rectangulares, en el *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 2, julio de 1969, pp. 154-57.

7. El enunciado decía que extrayendo por cierto procedimiento bolas de una bolsa que las contiene blancas y negras en proporción desconocida, existía una probabilidad fija de que la última bola de la bolsa fuese negra. Si tal afirmación es cierta, ha de serlo por igual para cada color. Por consiguiente, la probabilidad buscada deberá ser 1/2.

Aunque este razonamiento resuelve el problema en la forma en que fue presentado, queda por establecer la tarea verdaderamente difícil, a saber, que la probabilidad es fija y no depende de la composición de la bolsa. Podemos demostrarlo por

inducción, empezando con dos bolas, luego con tres, etc., o bien podemos buscar una demostración directa para el caso general. Desafortunadamente, ambos tipos de demostración son largos de exponer, por lo que me conformaré con invitar al lector a que consulte «A Sampling Process», de B. E. Oakley y R. L. Perry, en *The Mathematical Gazette* de febrero de 1965, pp. 42-44, donde dan una demostración directa.

Se podría concluir apresuradamente que la solución es generalizable, es decir, que si la bolsa contuviera una mezcla de *n* colores, la probabilidad de que la última bola fuese de un determinado color habría de 1/*n*. Pero no sucede así. Como ya hizo notar Perry en una carta, si hubiera dos bolas rojas, una blanca y una negra, la probabilidad de que la última sea roja, blanca o negra es, respectivamente, 26/72, 23/72 y 23/72.

8. Soluciones de los 9 problemas «a bote pronto»:

(1) Se ponen a contar los dos relojes de 7 y 11 minutos, al mismo tiempo que echamos el huevo en el agua hirviente. Cuando se termine la arena en el reloj de 7 minutos, le damos la vuelta y esperamos a que se agote el de 11. Entonces le damos otra vez la vuelta al reloj de 7 minutos. Cuando se agote también la arena de éste habrán transcurrido 15 minutos.

Aunque la solución anterior es la que menos tiempo requiere, obliga a dar dos vueltas a uno de los relojes. La primera vez que propuse el problema pedí la solución «más sencilla», sin pararme a pensar más. Varias docenas de lectores me hicieron notar que hay otra solución más larga (que precisa de 22 minutos en total), pero más «sencilla» en el sentido de que sólo es necesario voltear una vez uno de los relojes. Se ponen ambos en marcha simultáneamente y, transcurridos los primeros 7 minutos se inicia la cocción del huevo. Cuando se agote la arena en el reloj de 11 minutos, le damos la vuelta. Al agotarse por segunda vez la arena de esta ampolleta habrán transcurrido 15 minutos de cocción.

Si le ha resultado entretenido este rompecabezas, he aquí otro un poco más difícil, del mismo tipo, tomado de Su*perior Mathematical Puzzles*, de Howard P. Dinesman (Londres, Allen and Unwin, 1968). ¿Cuál es el método más rápido para cronometrar 9 minutos, disponiendo de una ampolleta de 4 y otra de 7?

(2) Cada cubierta se utiliza 4/5 partes del tiempo total. Por consiguiente, cada una ha sufrido un desgaste de 4/5 de 5.000 km, es decir, 4.000 km.
(3) Cualquiera que sea el color de la primera carta cortada, esta carta no puede ocupar lo alto del mazo producido tras el segundo corte. Con el segundo corte seleccionamos al azar una carta entre 51, de las que 25 son del mismo color que la primera. Por consiguiente, la probabilidad de que las dos cartas sean de colores iguales será 25/51, ligeramente inferior a 1/2.
(4) En todo sistema de numeración de base mayor que 2, el número 121 es cuadrado perfecto. Una demostración sencilla consiste en observar que con cualquiera de estas bases 11 por 11 da como producto 121. Craige Schensted ha demostrado que definiendo adecuadamente el concepto de «cuadrado perfecto», 121 sigue siendo un cuadrado incluso en sistemas de numeración con base negativa, fraccionaría, irracional o incluso compleja. «Aunque tal vez no quede agotada la enumeración de posibles bases, yo sí lo estoy, e imagino que usted también, así que lo dejaremos como está», termina escribiendo Schensted.
(5) La Figura 84 muestra la solución que yo le di a esta cuestión. A la derecha puede verse una segunda solución, descubierta por dos lectores de *Scientific American*.

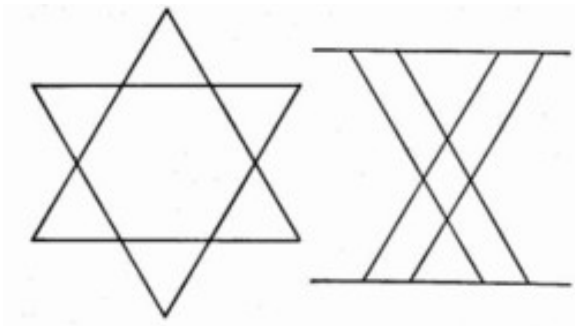


Figura 84. Con seis trazos rectos pueden hacerse ocho triángulos

(6) Todo ángulo puede ser bisecado con ayuda de regla y compás. Por bisección reiterada podemos dividir el ángulo en 4, 8, 16... partes iguales. Si alguno de los números de esta progresión fuese múltiplo de 3, resultaría posible dividir un ángulo en tres partes iguales por bisección reiterada, mediante regla y compás. Pero como

se ha demostrado que ésto es imposible, ningún número de la progresión geométrica de razón 2 es exactamente divisible por 3.

(7) El granjero tendrá 60 caballos. Por mucho que nos empeñemos en decir que las vacas son caballos, no por eso nos van a hacer caso.

Resulta que este problema es variante de una broma debida a Abraham Lincoln. En cierta ocasión Lincoln le preguntó a un individuo que mantenía que la esclavitud no era esclavitud, sino una forma de protección, cuántas patas tendría un perro si dijésemos que su cola es una pata. La respuesta, dijo Lincoln, es cuatro, porque llamar patas a los rabos no los convierte en patas.

(8) El griego vivió 79 años. No hubo año 0.

(9) Hay que preguntarle dos veces a la mujer: ¿Eres una «alternadora»? Dos respuestas negativas demuestran que es sincera, dos respuestas afirmativas, que es mentirosa, y una respuesta afirmativa y otra negativa, en cualquier orden, que es de las que da una de cal y otra de arena.

Ya había sido publicada la solución anterior cuando varios lectores me enviaron la que sigue. Cito textualmente una carta de Joseph C. Crowther, Jr.:

Podemos descubrir la inclinación de la dama sin más que preguntar dos cuestiones de respuesta evidente, tales como, «¿Tiene usted dos orejas?» o «¿Es húmeda el agua?». La sincera contestará que sí las dos veces, y la mentirosa, las dos veces que no. Las «veletas» dirían una vez que sí y otra que no, y el orden de las respuestas permite determinar además en qué punto de la alternación se halla, hecho que podría ser útil en el decurso de la conversación.

Ralph Seifert Jr. envió una solución de sólo una pregunta, que atribuye a su amigo M. A. Zorn. «Si alguien le formulara dos veces la misma pregunta, ¿respondería usted falazmente "no" una vez y sólo una?» La sincera diría «no», la mentirosa, «sí» y las veletas quedarían tan irremediablemente confundidas que no sabrían qué contestar.

Capítulo 16
Curiosidades del sistema solar

Alrededor del ancestral sendero
desfilaba, fila tras fila, el ejército de la
ley más inmutable
George Meredith, Lucifer in Starlight

La Astronomía, como todas las demás ciencias, tiene curiosos recovecos donde podemos toparnos con problemas matemáticos de carácter recreativo. En este

Capítulo echaremos un vistazo al sistema solar, del que tantos y tan sorprendentes descubrimientos se están realizando ahora, y comentaremos algunas divertidas cuestiones matemáticas que se han suscitado a lo largo de la historia de las especulaciones acerca de la estructura de la familia de cuerpos que orbitan alrededor del Sol.

Para empezar, un poco de historia. Está muy extendida la errónea creencia de que todos los pueblos de la antigüedad pensaban que la Tierra era plana y centro del universo. Los pitagóricos griegos, por ejemplo, enseñaban que la Tierra es redonda, y que está dotada de movimiento de rotación. Según ellos, el centro del sistema solar no era el Sol, sino un fuego central muy brillante, que el Sol reflejaba, al igual que nuestra Luna (como ahora sabemos) «arrebata» su «pálido fuego» (la terminología es de Shakespeare) al Sol. La Tierra, la Luna, el Sol y los otros cinco planetas entonces conocidos daban vueltas en torno al fuego central. Como la Tierra mantenía siempre su mitad no habitada hacia este fuego durante su traslación en la órbita, que duraba 24 horas, tal fuego nunca podía ser visto. Aristóteles sugirió que el obsesivo culto que los pitagóricos prestaban al número 10 (número triangular que es también suma de 1, 2, 3 y 4) fue causa de que miembros de la escuela pitagórica añadieran un décimo cuerpo astral, llamado antichthon (contra-tierra), también invisible por recorrer una órbita intermedia yaciente entre la Tierra y el fuego central. Un astrónomo griego del siglo IV a. de C., Aristarco de Samos, llegó a proponer un auténtico sistema heliocéntrico, donde todos los planetas giraban alrededor del Sol, pero su tratado se ha perdido, y solamente se tienen referencias de él a través de comentarios de Arquímedes.

Empero, el modelo que dominó la astronomía griega fue el modelo geocéntrico de Aristóteles: una Tierra esférica inmóvil, plantada en el centro del universo, alrededor de la cual giraban todos los demás cuerpos celestes, incluidas las estrellas. Aristóteles defendió y sostuvo un magnífico razonamiento anterior en favor de la redondez de la Tierra: durante los eclipses de Luna, la sombra de la Tierra sobre aquélla muestra un borde redondeado, perfectamente explicable si la Tierra fuese una bola. El sistema ptolernaico del siglo II d. de C., refinamiento del aristotélico fue inventado para dar cuenta de las erráticas trayectorias de los cinco planetas visibles directamente cuando cruzan nuestro firmamento. Para ello se hacía

que los planetas recorrieran círculos menores, llamados epiciclos, al mismo tiempo que iban describiendo órbitas mayores en torno a la Tierra. El modelo era bastante adecuado para explicar los movimientos aparentes de los cuerpos celestes, incluidos los irregulares movimientos de los planetas y de la Luna derivados del carácter elíptico de sus trayectorias; bastaba con postular suficientes epiciclos y hacer que éstos fueran recorridos con velocidad no uniforme.

Todos sabemos hoy que, tras larga controversia, que culminó en el proceso de Galileo terminó por imponerse el modelo heliocéntrico de Nicolaus Copernicus. Se suele aducir que la victoria de la teoría copernicana se debió solamente a que era más sencilla que la ptolemaica. Thomas S. Kuhn ha ido más lejos, negando que el modelo copernicano fuese más sencillo o más ajustado a los datos observados. «...El verdadero atractivo de la astronomía heliocéntrica», escribe en *The Copernican Revolution*, «fue más estético que pragmático. Para los astrónomos, la elección inicial entre los sistemas de Copérnico y Ptolomeo sólo podría ser cuestión de gustos... »

Pero Kuhn está equivocado. Había muchas observaciones astronómicas, señaladas por el propio Copérnico, que tenían en su teoría explicación mucho más sencilla que en la ptolemaica; y esto confería a la teoría copernicana una autoridad que era mucho más que cuestión de «gusto». Y más adelante, la teoría copernicana explicó además gran variedad de fenómenos astronómicos, entre ellos el abultamiento ecuatorial terrestre, para los que la teoría ptolemaica no podía dar razón. (Sobre lo anterior puede verse «Kuhn and the Copernican Revolution», por Richard J. Hall, en el *British Journal for the Philosophy of Science*, mayo de 1970, pp. 196-97.)

La última peripecia de esta vacilante historia llegó con la teoría general de la relatividad, de Einstein. Si esta teoría es correcta, no existen movimientos absolutos con respecto a un espacio fijo y, por consiguiente, no hay «sistemas de referencia privilegiados». Podemos suponer, si lo queremos, que la Tierra está fija, ni siquiera en rotación, y las ecuaciones tensoriales de la relatividad se encargarán de todo. Si la Tierra ha engordado por la cintura, ello no se debe a las fuerzas de inercia, sino a que el Cosmos en rotación alrededor de ella produce un campo gravitatorio responsable del abultamiento ecuatorial. Como todo movimiento es relativo, preferir para el sistema solar un modelo geocéntrico o heliocéntrico no pasa de ser cuestión

de conveniencia. Decimos que la Tierra gira alrededor de un eje porque es enormemente más sencillo suponer que el cosmos es un sistema de referencia inercial, que decir que está girando y desplazándose de formas complejas respecto a nosotros. No se trata de que la teoría heliocéntrica sea «más verdadera». En realidad, el propio Sol se mueve respecto de las estrellas, y carece de sentido decir de él que es centro del cosmos. El único movimiento «verdadero» es el movimiento relativo de la Tierra y el resto del universo.

Esta arbitrariedad en la elección del sistema de referencia interviene en un divertido problema que de cuando en cuando surge todavía en conversaciones de café. La Luna da vueltas en torno a la Tierra de la misma forma que la Tierra giraba en torno al fuego central del sistema pitagórico, es decir, mostrando siempre la misma cara hacia la Tierra. Este hecho ha intrigado por igual a astrónomos y poetas, grandes o pequeños. En «One Word More», Robert Browning compara las dos caras de la Luna a las «dos caras del alma» de los hombres: « ¡una, con la que enfrentarse al mundo; la otra para mostrarla a una mujer cuando él la ama!». Y Edmund Gosse atribuyó a su criado su «inmortal» cuarteto:

¡Oh Luna al contemplar luminosa
tu faz, por el cosmos presurosa,
muchas veces fue mi sentir primero
si admirar podré algún día tu trasero!

El púdico hábito lunar de ocultarnos su reverso suscita la siguiente cuestión trivial: ¿gira la Luna sobre sí misma al tiempo que lo hace alrededor de la Tierra? Los astrónomos nos dirían que sí, una vez en cada revolución. Aunque cueste creerlo, tan soliviantados por esta opinión han quedado algunos hombres de reconocida inteligencia, que han llegado a publicar (por lo común, a sus expensas) largas monografías explicando que la Luna de ninguna manera puede decirse que gire sobre sí misma. (En *Budget of Paradoxes*, de Augustus de Morgan, se comentan algunos de estos tratados.) Incluso el gran Johannes Kepler prefirió pensar que la Luna no tenía movimiento de rotación, y la comparaba a una bola atada a una correa, volteada por encima de la cabeza. El Sol gira, argüía Kepler, para impartir a

sus planetas el movimiento de traslación, y la Tierra gira sobre si misma para inducir el movimiento de su luna. Pero como la Luna ya no tiene lunas propias más pequeñas, no tiene tampoco necesidad de rotar sobre sí misma.

El problema de la rotación de la Luna es fundamentalmente idéntico al de la paradoja de las monedas, explicada en el

Capítulo 2 de mi *Carnaval matemático*. Si se hace rodar una peseta sobre el contorno de otra peseta fija, manteniendo apretados sus cantos para que no haya deslizamiento, la moneda «ruleta» da dos vueltas sobre sí misma al darle una vuelta completa a la otra.

Pero, ¿de veras es así? Joseph Wisnovski, redactor de *Scientific American*, me ha llamado la atención acerca de una furiosa controversia que, hace ahora un siglo, se desató en la sección de cartas de dicha revista durando casi tres años. En 1866, un lector preguntaba: «¿cuántas vueltas dará alrededor de su eje una rueda al rodar una vuelta completa sobre otra rueda fija de igual tamaño?». « Una», contestaron los redactores de la revista. La consecuencia fue una riada de cartas de lectores en desacuerdo. En el volumen 18 (1868), pp. 105-106, *Scientific American* publicó una selección de cartas tomadas de «entre más de una arroba», que mantenían el punto de vista de la doble rotación. Durante los tres meses siguientes la revista publicó correspondencia tanto de «unistas» como de «dualistas», incluyendo grabados de complejos dispositivos mecánicos que unos y otros habían construido para dilucidar definitivamente la cuestión. «Si volteásemos un gato por encima de nuestra cabeza», escribía el unista H. Bluffer el 21 de mayo de 1868, ¿girarían la cabeza, los ojos, y las vértebras del animal en torno a sus ejes respectivos? ¿Moriría el animal en la séptima vuelta? ...»

El volumen de correspondencia sobre el tema alcanzó proporciones tales, que en abril de 1868 los editores decidieron cerrar el debate en *Scientific American*, prosiguiéndolo en cambio en una nueva revista mensual, *The Wheel* [La Rueda] dedicada enteramente «a la gran cuestión». Al menos un número de esta publicación debió ver la luz, pues en su edición del 23 de mayo, *Scientific American* prevenía a sus lectores que podrían adquirirla en quioscos, o por correo, al precio de 25 centavos. Quizá toda la polémica fuese una tomadura de pelo de los editores. Evidentemente, todo el debate se reduce a cómo defina uno la frase «girar en torno a su eje». Para un observador situado en la moneda fija, la ruleta da tan sólo una vuelta. Para un observador exterior, que mire desde arriba las dos monedas, la ruleta da dos vueltas. La Luna no gira sobre sí misma con respecto a la Tierra, pero sí lo hace con relación a las estrellas. ¿Sabría explicar el lector, sin construir un

modelo, cuántas veces girará alrededor de sí misma la moneda exterior suponiendo que su diámetro sea la mitad del diámetro de la moneda fija?

La misma cuestión trivial que se suscitó respecto a la rotación lunar pudo haberse planteado entre 1890 y 1965 con el planeta Mercurio. El astrónomo italiano Giovanni Schiaparelli (el mismo que, al dibujar mapas marcianos entrecruzados por una malla de arcos más o menos rectilíneos que había creído observar, dio pábulo a las más absurdas historias sobre canales de riego en el planeta rojo) anunció a finales de la década de 1880 que sus observaciones demostraban que Mercurio conservaba siempre la misma cara en dirección al Sol. O dicho de otra forma, que daba una vuelta sobre sí mismo en cada una de sus revoluciones en torno al Sol (que duran 88 días terrestres). Durante los 75 años siguientes, cientos de observaciones de astrónomos eminentes confirmaron este hecho. Debido a que Mercurio carece de atmósfera que transfiera calor, se supuso que su cara iluminada se encontraría perpetuamente hirviendo, a unos 350 ó 400 grados centígrados, mientras que su cara oscura estaría perennemente a temperatura cercana al cero absoluto. Nada menos que en 1962, Fred Hoyle escribía: «Mercurio tiene la distinción de poseer no sólo el lugar más cálido de todo el sistema planetario, sino también el más frío».

De acuerdo con esto. entre los lados frío y cálido de Mercurio debería sin duda existir un cinturón en perpetuo crepúsculo, de clima presumiblemente lo bastante suave como para soportar vida. Esta idea tuvo interesados desde hace mucho a los escritores de cienciaficción. «En crepúsculo. Aquí estamos siempre en crepúsculo», dice un visitante de Mercurio en un cuento de Arthur Jean Cox, The Twilight Planet (1951). «Los días pasan, o al menos así lo dicen los relojes y calendarios, pero el tiempo, el tiempo subjetivo, está delicadamente congelado en mitad de su vuelo. El valle es un océano de sombras; mareas de umbría lamen delicadamente las montañas, sus orillas». En «Sunrise on Mercury» (1957), de Robert Silverberg, los astronautas se posan en el «cinturón crepuscular» de Mercurio, situado entre «el reino gélido y limitado por hielos del más profundo pozo imaginado por Dante», y «el imperio del ardiente azufre». El cinturón es la zona donde se funden el fuego y la gelidez, siendo «cada hemisferio un infierno peculiar». Cuando el cuento fue reimpreso en 1969 formando parte de una antología publicada por Dell (First Step

Outward), el recopilador, Robert Hoskins, tuvo que añadir una nota explicando que el cuento había salido ya del terreno de la ciencia ficción, para entrar en el de la pura fantasía.

La primera indicación de que algo no iba como es debido surgió en 1964, cuando las observaciones de radioastrónomos australianos mostraron que la cara supuestamente helada de Mercurio tiene una temperatura media de unos 15º C. ¿Será posible, se preguntaron todos, que Mercurio pueda poseer atmósfera? En 1965, Gordon H. Pettengill y Rolf B. Dyce, mediante ecos de radar procedentes de bordes opuestos del planeta, descubrieron la verdadera razón. Schiaparelli se había equivocado con respecto a la rotación de Mercurio, igual que antes sobre los canales marcianos. Mercurio da una vuelta alrededor de su eje cada 59 días, que son exactamente dos tercios de su periodo orbital. Al parecer, el planeta tiene una masa desequilibrada respecto a su eje de rotación, tal como le sucede a nuestra Luna, o bien se crean en él prominencias semejantes a mareas, que provocan que el planeta quede atrapado por el Sol en una especie de «ciclo de resonancia» de relación 3 : 2. Por cada dos órbitas, el planeta da tres vueltas en torno a su eje. Una de las causas que explican el error de los astrónomos es que éstos suelen observar Mercurio en un momento favorable que se presenta una vez al año. Como siempre veían las mismas marcas parduscas, presumían que, dado que Mercurio había dado cuatro órbitas desde la observación anterior, había dado también cuatro vueltas sobre sí mismo, cuando en realidad había dado seis. Aunque el error admita estas racionalizaciones y disculpas, como escribía Irwin I. Shapiro («Radio-Observations of the Planets», por Irwin I. Shapiro, Scientific American, julio de 1968), todavía hoy resulta «intranquilizador contemplar esta persistencia en el engaño de uno mismo». ¡Qué malicioso placer no hubiera experimentado Charles Fort, excéntrico iconoclasta de la ciencia, de haber sabido de tal fenomenal metedura de pata!

Todavía más sorprendente fue el descubrimiento sobre la rotación de Venus, en 1962. Se creía que Venus tenía un lentísimo movimiento de rotación, de periodo tan parecido a los 225 días de período de traslación, que muchos astrónomos, Schiaparellí entre ellos, estaban convencidos de que los períodos de traslación y rotación de la estrella vespertina son idénticos, como le sucede a nuestra Luna y, por lo que se creía entonces, a Mercurio.

En 1962, los radio-astrónornos establecieron con ayuda del radar Goldstone del Jet Propulsion Laboratory que Venus tiene una lenta rotación de sentido inverso al de los demás planetas. (El sentido de rotación de Urano es ambiguo, pues estando su eje casi paralelo a la eclíptica, cualquiera de sus polos puede ser tomado corno norte). Venus es el único planeta donde el sol levanta (y muy lentamente, por cierto) por el oeste. Además, su período de rotación es de 243,16 días, más largo que su año-, valor tan particular que cada vez que Venus ocupa la posición de máxima cercanía a la Tierra, presenta siempre hacia nosotros la misma cara. En Don Juan, Lord Byron nos habla de un «firmamento rosáceo, con una estrella [Venus] refulgiendo a su través, como un ojo». Por qué habría de tener Venus clavado su ojo en la Tierra de tan curiosa manera, sigue siendo un misterio. Presumiblemente le ocurra como a Mercurio, que su masa sea asimétrica, o bien tenga una prominencia o marea gravitatoria lo suficientemente grande como para quedar atrapado por la Tierra en un inesperado acoplamiento de resonancia.

Otra de las más sonadas imposturas de toda la historia de la astronomía fue la falsa luna de Venus. En 1645, un astrónomo italiano, Francesco Fontana, aseguró haber observado una luna en torno al planeta Venus. Su observación fue confirmada en 1672 por Jean Dominique Cassini, quien había descubierto ya dos satélites de Saturno y más adelante descubriría otros dos. Muchos renombrados astrónomos del siglo XVIII reseñaron también observaciones de la luna venusina. En 1773 el famoso físico, matemático y astrónomo Johann Heinrich Lambert publicó un tratado sobre la luna de Venus, donde llegaba incluso a calcular su órbita. Federico el Grande quiso condecorar a Jean Le Rond D'Alembert por haber éste bautizado la luna de Venus en su honor, si bien D'Alembert declinó cortésmente la distinción. Evidentemente tal luna no pudo haber existido jamás, pues habría sido visible como una pequeña mota oscura cuando Venus cruza por delante del disco solar. Lo que los astrónomos vieron fueron quizás estrellas cercanas o imágenes fantasmas producidas por refracción en las lentes, o como en el caso de los astrónomos que «observaron» los canales marcianos, sus deseos se impusieron a su sentido de la realidad. Parecida explicación deben tener sin duda las observaciones realizadas durante los siglos XVIII y XIX del planeta Vulcano, hipotéticamente situado en el interior de la órbita de Mercurio.

¿Cómo ha evolucionado el sistema solar? Nadie lo sabe con certeza. En la actualidad, la explicación más aceptada es esencialmente la primera de las modernas, propuesta por Inmanuel Kant. Los planetas serían condensaciones de gases y partículas de polvo que giraban en torno al Sol formando a modo de nube discoidal. Vista desde la estrella polar, esta nube giraría en sentido contrario a las agujas del reloj, lo que explicaría por qué todos los planetas giran en el mismo sentido alrededor del Sol. ¿Cuál es entonces la causa de que sus antiguos senderos celestiales estén separados como lo están? ¿Se trata de mera casualidad, u obedecen alguna ley matemática?

Fue Kepler quien inventó la explicación más fantástica. Intentó primero inscribir y circunscribir en las órbitas polígonos regulares y después esferas y cubos; pero no atinaba a dar una pauta que proporcionara las dimensiones correctas. De pronto le vino una inspiración. Hay seis planetas, y por tanto, cinco espacios intermedios entre ellos. ¿Y no es cierto que hay cinco y solamente cinco sólidos regulares convexos? Encajando uno dentro de otro los cinco sólidos platónicos en un cierto orden, con esferas intermedias encargadas de traducir las excentricidades de las órbitas elípticas de los planetas, obtuvo una estructura que se correspondía aproximadamente con las que entonces se creía eran las distancias máxima y mínima de los planetas al Sol (véase la Figura 85).

Se trataba de una teoría absurda, incluso en tiempos de Kepler. Pero Kepler era una compleja y curiosa combinación de intuición científica admirable y de creencias ocultistas (astrología incluida), que le hacían sentir la necesidad de armonías geométricas como éstas. «El intenso placer que he recibido de este descubrimiento», escribió, «nunca podrá ser expresado con palabras». Es irónico que sus convicciones más correctas, como que los planetas describen elipses en vez de círculos, o que las mareas son provocadas por la Luna, fueron consideradas no menos ridículas, siendo despreciadas incluso por Galileo, quien las consideró fruto de la fantasía de Kepler.

En 1772, Johann Daniel Titus de Wittenberg anunció el descubrimiento de una sucesión numérica sencilla que al parecer reflejaba bien las proporciones de las órbitas planetarias. Esta sucesión fue pronto conocida como «ley de Bode», porque cuatro años más tarde, un astrónomo alemán de más renombre, Joham Elert Bode,

la dio a conocer en un libro de texto. Para obtener los números se empieza por 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192... Cada uno de estos números es mitad del siguiente, excepto el 0, que debería ser 1 1/2. Ahora se le suman 4 a los números de la sucesión.

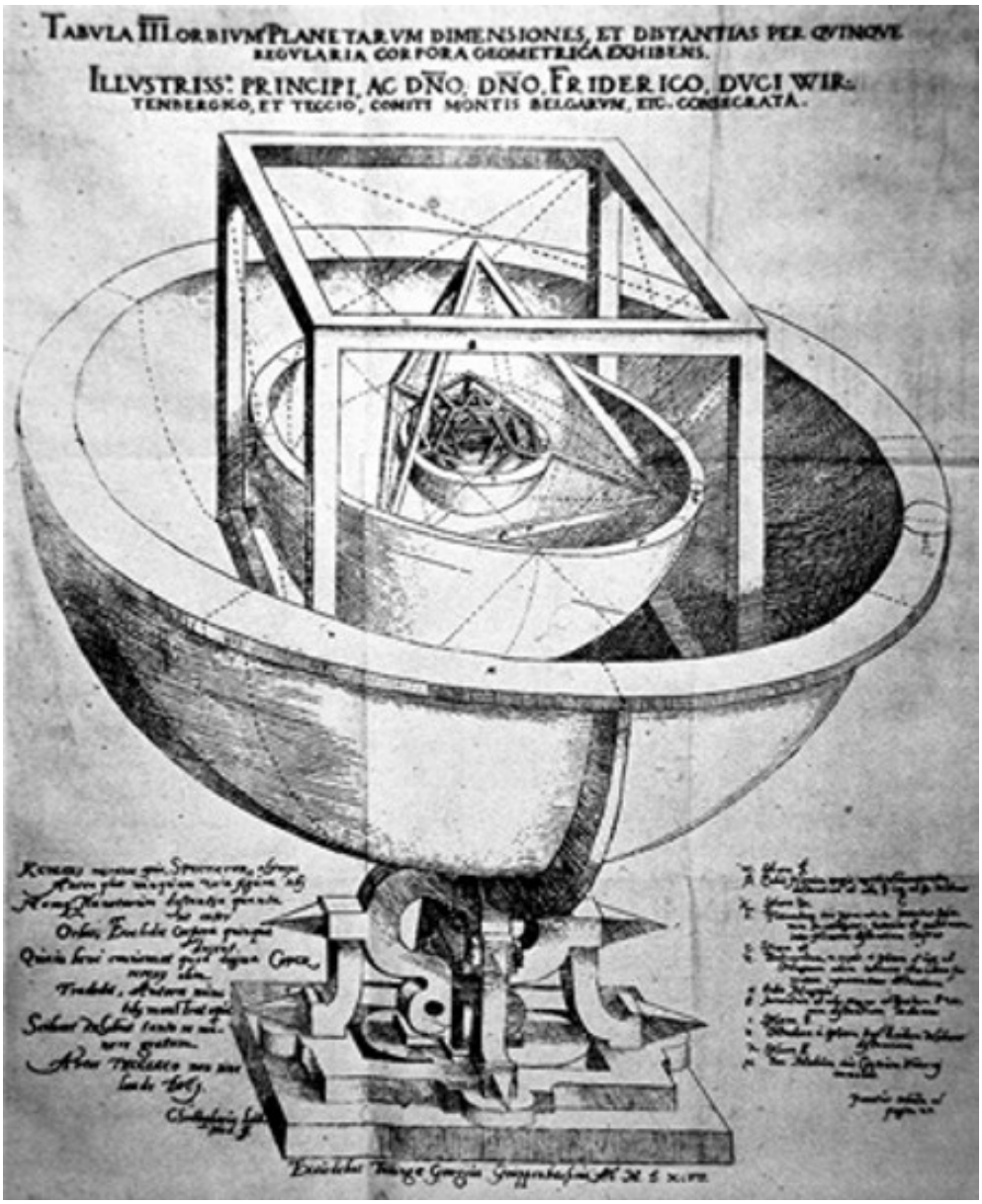


Figura 85. Modelo de Kepler del sistema solar.

La serie resultante, 4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196..., da las razones de las distancias medias de los planetas al Sol. Tomando la distancia Tierra-Sol como

«unidad astronómica», el tercer número, 10, se convierte en 1. Dividiendo por 10 los demás números se obtienen entonces las distancias medias de los planetas al Sol, expresadas en unidades astronómicas. La tabla de la Figura 86 muestra las distancias dadas por la ley junto a las distancias verdaderas. Observemos que las distancias medias de los seis primeros planetas, que eran los únicos todavía conocidos cuando Bode publicó su libro, coinciden sorprendentemente con los valores dados en la serie de Bode. Y no sólo eso, sino que la ley de Bode tuvo éxito en dos magníficas predicciones.

Planeta	*Serie de Bode*	*Distancia media verdadera*
MERCURIO	0,4	0,39
VENUS	0,7	0,72
TIERRA	1	1
MARTE	1,6	1,52
(CERES)	2,8	2,77
JUPITER	5,2	5,20
SATURNO	10	9,57
URANO	19,6	19,15
NEPTUNO	38,8	29,95
PLUTON	77,2	39,39

Figura 86. Ley de Bode sobre los tamaños relativos de las órbitas planetarias

La primera de ellas era que debería existir un planeta a 19,6 unidades astronómicas del Sol. Al ser descubierto Urano en 1781, se le apreció una distancia de 19,2 u.a., hecho que convenció a muchos astrónomos de la fiabilidad de la ley de Bode. La segunda predicción era que debería existir un planeta en el enorme vano situado entre las órbitas de Marte y Júpiter, a unas 2,8 u.a. del Sol. En 1801, y precisamente en el primer día del nuevo siglo, se descubrió el mayor de todos los asteroides, Ceres, a una distancia observada de 2,77 u.a. del Sol.

Más tarde se observaron en esta región miles de planetoides más pequeños; y los defensores de la ley de Bode arguyeron que estos planetoides eran los restos de un planeta que ocupaba una órbita cercana a la prevista por la ley, y que por causas desconocidas hizo explosión.

Lamentablemente, la ley fallaba para Neptuno y Plutón, lo que convenció a muchos astrónomos de que los anteriores éxitos de la serie de Bode debían haber sido casuales. Otros astrónomos han sugerido recientemente que Plutón pudiera ser un satélite liberado de Neptuno, y que antes de que ambos astros se separasen, Neptuno debió ocupar una órbita cercana a la prevista por la ley. Se ha argumentado también que la ley de Bode pudiera ser válida para todos los planetas del sistema solar, excepto los situados en las zonas límite interior y exterior, donde sería más verosímil que se dieran irregularidades. Como las órbitas de Mercurio tienen excentricidades mucho mayores y están mucho más inclinadas con relación al plano de la eclíptica que las de los demás planetas, no es absurdo suponer que por sus condiciones límite fueran excepciones de la regla general.

¿Es la ley de Bode una curiosidad numerológica tan intrascendente como la sucesión de poliedros encajados de Kepler, o por el contrario es manifestación de algún hecho valioso que algún día quedará explicado en alguna teoría sobre el origen del sistema solar? La cuestión no está resuelta todavía. Los partidarios de la ley suelen aducir en su favor la sucesión numérica anunciada en 1885 por el matemático suizo Johann Jakob Balmer, que se ajustaba a las frecuencias de las líneas espectrales del hidrógeno. Esta serie era pura numerología hasta que varios decenios después Nieis Bohr descubrió en la mecánica cuántica explicación a la «serie de Balmer».

«El quid de la cuestión», escribe Irwin John Good en un reciente articulo que se menciona en la bibliografía del libro, «consiste en saber si una ley numerológica no. respaldada por modelo conceptual ninguno es lo suficientemente llamativa como para decidirnos a buscarle un modelo científico que la explique.» Desde mi puesto de espectador lego no me atrevo ni a conjeturar cómo será tratada la ley de Bode en los años venideros.

Para terminar, otro problema delicado y con algo de trampa. Conforme la Tierra recorre su órbita en torno al Sol , la Luna describe una trayectoria sinuosa con respecto al Sol. A lo largo de 12 órbitas lunares alrededor de la Tierra, ¿cuántas secciones de esa trayectoria sinuosa son cóncavas, en el sentido de que sus lados convexos apuntan hacia el Sol?

Soluciones

La solución del primer problema es que la moneda da tres vueltas sobre sí misma al dar una vuelta en torno a una rueda fija de diámetro doble, y sobre la cual rueda sin deslizar. Como el perímetro de la ruleta es mitad del perímetro de la circunferencia base, vista desde la circunferencia fija la ruleta da dos vueltas sobre sí misma, y la revolución en torno a ésta añade una tercera vuelta para un observador que las contemple desde arriba. La fórmula general, siendo *a* el diámetro de la rueda fija, y *b* el de la ruleta, es (*a/b*) + 1, y nos da el número de rotaciones en cada revolución. Por tanto, si la ruleta tiene diámetro doble de la circunferencia base, gira sobre sí misma 1 1/2 veces. Conforme la ruleta crece con respecto a la circunferencia base, el número de rotaciones por revolución tiende hacia el límite 1, límite que sólo se alcanzaría cuando la ruleta rodase en torno a una circunferencia «degenerada» de diámetro cero, es decir, de un punto. Supongamos que el diámetro de la moneda fija sea igual al perímetro de la moneda ruleta. ¿Cuántas veces gira sobre sí misma la moneda exterior en cada revolución?

La solución al número de segmentos cóncavos de la sinuosa trayectoria de la Luna en torno al Sol es que en ningún momento tal trayectoria es cóncava. La Luna está tan cercana a la Tierra, y la velocidad de la Tierra es tan grande es comparación con la velocidad de la Luna en torno a la Tierra, que la trayectoria de la Luna es, con respecto al Sol, convexa en todos sus puntos.

Capítulo 17
Construcciones de Mascheroni

Se dice con frecuencia que los geómetras, obedeciendo una norma tradicional atribuida a Platón, construían todas sus figuras planas ayudándose tan sólo de compás y regla (no graduada). Esto no es exacto. Los griegos se sirvieron de muchos otros instrumentos geométricos, entre ellos, de utensilios para trisecar ángulos. Mas, por otra parte, sí estaban convencidos de que las construcciones con regla y compás eran más elegantes que las conseguidas mediante otros instrumentos. La futilidad de sus tenaces esfuerzos por lograr métodos de este tipo en la trisección de ángulos, la cuadratura del círculo o la duplicación del cubo, los

tres grandes problemas geométricos de antigüedad, no pudo ser demostrada durante cerca de 2.000 años.

En siglos posteriores, los geómetras se entretuvieron en imponer restricciones todavía más enérgicas sobre los instrumentos utilizables en los problemas de construcción de figuras. El primer esfuerzo sistemático de esta naturaleza es un trabajo atribuido al matemático persa Abul Wefa, en el siglo x, donde se describen construcciones posibles con la regla y un compás «rígido», más tarde llamado, burlonamente, «compás oxidado». Se trata de un compás cuya apertura no puede modificarse, Los conocidos procedimientos para trazar la mediatriz de un segmento o la bisectriz de un ángulo son ejemplos sencillos de construcciones con regla y compás rígido.

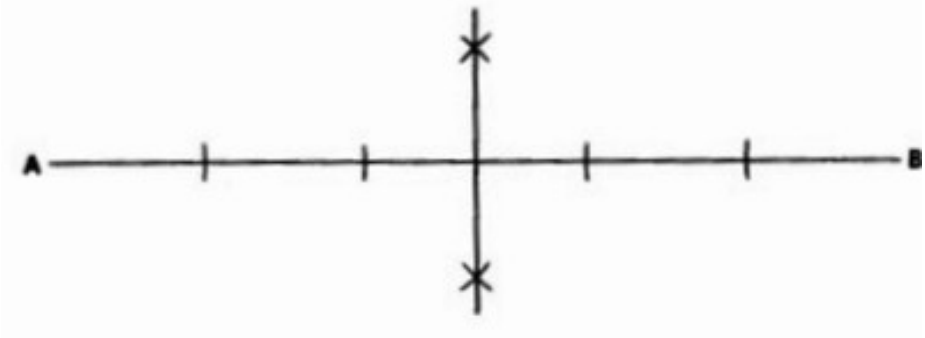


Figura 87. Trazado de la mediatriz de un segmento arbitrario con un "compás oxidado"

En la Figura 87 vemos cuán fácilmente podemos servirnos de un compás oxidado para hallar la mediatriz de un segmento de longitud al menos doble de la apertura del compás. Muchas de las soluciones de Abul Wefa, y, en particular, su método de construcción del pentágono regular conocido el lado son extraordinariamente ingeniosas y muy difíciles de mejorar

La Figura 88 muestra cómo utilizar un compás oxidado para trazar una recta paralela a la recta *AB* que pase por un punto *P* cualquiera, exterior a ella. Para lograrlo se construyen en tres pasos los vértices de un rombo; el método es tan sencillo que una ojeada a la figura permite comprenderlo. Aunque conocido desde

por lo menos 1574, el método es constantemente redescubierto y publicado como original (véase, por ejemplo, *Mathematics Teacher*, febrero de 1973, p. 172).

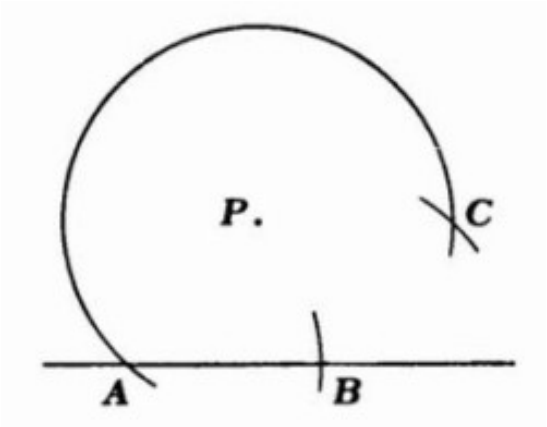


Figura 88. Construcción de una recta paralela con ayuda de un compás oxidado

Leonardo da Vinci y numerosos matemáticos renacentistas hicieron también algunos tanteos en la geometría de compás rígido, pero, en orden de importancia, el segundo tratado sobre el tema fue *Compendis Euclidis Curiosi*, folleto de autor anónimo, publicado en 1673, en Amsterdam. Fue traducido al inglés cuatro años más tarde, por Joseph Moxon, a la sazón hidrógrafo real en Inglaterra. Se sabe ahora que esta obrita fue escrita por un geómetra danés, Georg Mohr, con quien volveremos a tropezar dentro de un momento. En 1694, un agrimensor londinense, William Leybourn, en un extravagante libro llamado *Pleasure with Profit*, trató las construcciones de compás rígido como una forma de juego matemático. En el encabezamiento de su sección dedicada al tema escribió: «Mostrando cómo (sin compás), teniendo solamente un Tenedor Corriente (o una horquilla semejante, que no abriré ni cerraré), y una Regla Lisa, pueden realizarse muchas deliciosas y divertidas Operaciones Geométricas.»

Ya en el siglo XIX, el matemático francés Jean Víctor Poncelet sugirió una demostración, más tarde rigurosamente desarrollada por el suizo Jakob Steiner, de que todas las construcciones realizables con regla y compás ordinario son realizables también con regla y un compás rígido. Tal conclusión resulta inmediatamente de otro notable teorema de ambos, a saber, que toda construcción que sea factible con regla y compás es posible con sólo la regla, una vez dada en el

plano una circunferencia fija y su centro. A principios del siglo XX se demostró que ni siquiera hacía falta disponer de la totalidad de la «circunferencia de Poncelet-Steiner». ¡Tan sólo se precisan un arco de esta circunferencia, por pequeño que sea, y su centro! (En las construcciones de este tipo se admite que un círculo ha quedado construido cuando se determinan su centro y un punto de su circunferencia.)

Muchos matemáticos de renombre habían estudiado qué construcciones son posibles con instrumentos tan sencillos como la regla sola, la recta provista de dos puntos marcados sobre ella, la regla de dos bordes rectos paralelos, la «regla» con dos bordes rectos perpendiculares (escuadra) o bajo otros ángulos, etc. Así las cosas, en 1794 el geómetra italiano Lorenzo Mascheroni dejó maravillado al mundo matemático al publicar su *Geometria del Compasso*, donde demostraba que toda construcción realizable con regla y compás puede efectuarse con exclusivamente un compás móvil. Como es imposible dibujar líneas rectas con sólo un compás, es preciso admitir que dos puntos, obtenidos por intersección de arcos, definen una recta.

Todavía hoy se llaman construcciones de Mascheroni a las realizadas exclusivamente con el compás, a pesar de que en 1928 se descubrió que Mohr había demostrado el mismo teorema en una oscura obrita, *Euclides Danicus*, publicada en 1672 en ediciones danesa y holandesa. Un estudiante danés dio con el libro en una librería de lance de Copenhague, y se lo mostró a su profesor, Johannes Hjelmslev, de la Universidad de Copenhague, quien inmediatamente comprendió la importancia del descubrimiento. Hjelmslev la publicó en edición facsímile, acompañada de una traducción al alemán, el mismo año de 1928.

Los geómetras contemporáneos han perdido interés por las construcciones Mohr-Mascheroni, pero en razón de los muchos problemas de índole recreativa que contienen, su puesto ha sido ocupado por los aficionados. El reto planteado a éstos consiste en mejorar las construcciones conocidas, lográndolas en menor numero de pasos. En ocasiones es posible perfeccionar los métodos de Möhr o de Mascheroni; en otras, no. Fijémonos, por ejemplo, en la más sencilla de las cinco soluciones que dio Mascheroni a su problema Nº. 66, que pide hallar un punto alineado con otros dos y equidistante de ambos. (Véase la Figura 89).

Sean *A* y *B* los puntos dados. Se trazan dos circunferencias de radio *AB* con centros en *A* y en *B*. Conservando la misma apertura del compás, y tornando como centros *C* y *D*, marcamos los puntos *D* y *E*. (Los lectores recordarán sin duda que así comienza el procedimiento para dividir una circunferencia en seis arcos iguales, o en tres arcos iguales, si los puntos de división se toman alternativamente.) El punto *E* se encontrará en la prolongación hacia la derecha de la recta *AB*, y *AE* será doble de *AB*. (Como es obvio, tal procedimiento puede reiterarse a la derecha, y duplicar, triplicar o producir un múltiplo cualquiera de la longitud *AB*.) Se abre el compás con el radio *AE* y se traza un arco, de centro *E*, que interseca a la circunferencia de la izquierda en *F* y en *G*. Volvamos a cerrar el compás, tomando el radio *AB* una vez más. Con centros *F* y *G* se trazan dos arcos, que al cortarse, determinan el punto *H*.

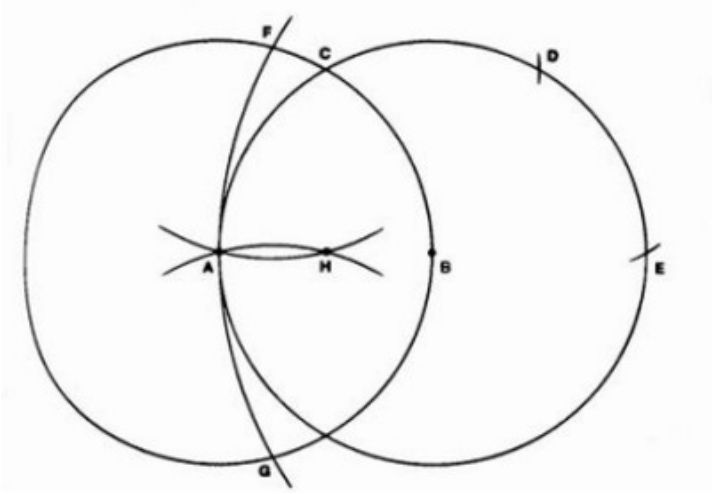


Figura 89. Método de Mascheroni para hallar un punto H alineado equidistante de los puntos A y B, con sólo el compás

El punto *H* está alineado Y equidista de *A* y de *B*. La primera parte es fácil de admitir, por razones de simetría. La equidistancia se prueba observando que los triángulos isósceles de vértices *AFH* y *AFE* tienen común el ángulo (en la base) *FAE*, y por consiguiente, son semejantes. *AF* es la mitad de *AE*; luego *AH* es la mitad de *AB*. Los lectores familiarizados con la transformación de inversión ya se habrán dado cuenta de que el punto *H* es el inverso de *E* respecto de la circunferencia izquierda. Puede verse una demostración sencilla de esta propiedad en *What Is Mathematics?* (traducción española, *¿Qué es la matemática?.* Ed. Aguilar, Madrid)

de Richard Courant y Herbert Robbins, p. 145. Observemos que si al principio hubiéramos trazado el segmento *AB*, y el problema consistiera en hallar su punto medio, con sólo el compás, bastaría trazar únicamente el segundo de los dos últimos arcos, reduciendo así a seis el número de etapas. No conozco para este problema soluciones más breves.

Otro famoso problema resuelto por Mascheroni fue la determinación del centro de una circunferencia. Su método es demasiado complicado para ser expuesto aquí, pero afortunadamente hay una versión simplificada, de origen desconocido, que suele venir en libros de geometría un poco antiguos. Podemos verla en la Figura 90.

Sea *A* un punto cualquiera de la circunferencia. Tomando el centro *A*, abrimos el compás y trazamos un arco que intercepte a la circunferencia en *B* y *C*. Con radio *AB* y centros en *B* y *C* trazamos arcos, que se cortarán en *D*. (El punto *D* puede estar dentro de la circunferencia o debajo de ella, según la apertura inicial del compás.) Con radio *AD* y centro en *D* trazamos el arco que da las intersecciones *E* y *F*. Con radios *AE* y centros *E* y *F* trazamos arcos, que se interceptan en *G*. El punto *G* es el centro de la circunferencia. Como antes, podemos demostrarlo fácilmente, pues los triángulos isósceles de vértices *DEA* y *GEA* tienen igual ángulo básico *EAG*, y por consiguiente, son semejantes. El resto de la demostración, así como otra basada en la inversión, puede verse en *The Surprise Attack in Mathematical Problems*, de L. A. Graham, (Dover, 1968), problema nº 34.

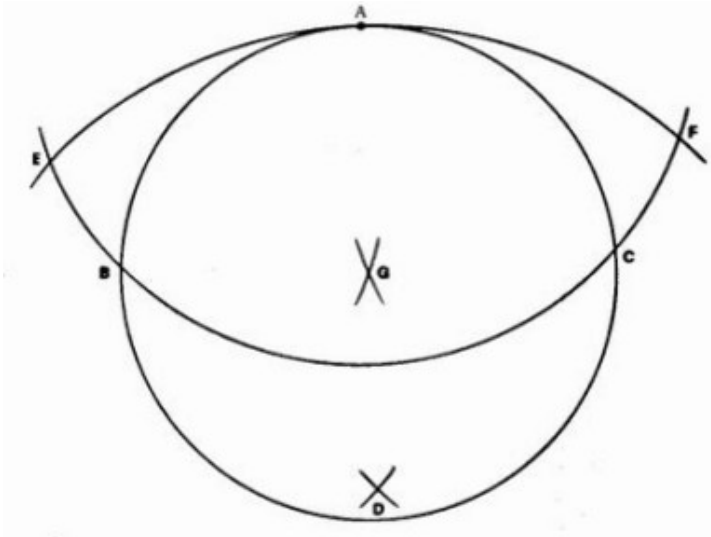


Figura 90. Cómo hallar el centro de una circunferencia en seis pasos, con compás

solamente

Un tercer famoso problema del libro de Mascheroni es el llamado «problema de Napoleón», porque se dice que Napoleón se lo propuso a Mascheroni. No suele saberse que Napoleón era entusiasta matemático aficionado, y aunque tal vez no muy penetrante, sin duda estaba fascinado por la geometría, ciencia, por otra parte, de gran importancia militar. Además, Napoleón sentía ilimitada admiración por los creativos matemáticos franceses contemporáneos suyos. Gaspard Monge, uno de ellos, parece haber sido el único hombre con quien Napoleón mantuvo amistad permanente. Los aficionados a las matemáticas recreativas recordarán a Monge sobre todo por las barajaduras de su nombre, que analizó siendo todavía muy joven. En ellas, las cartas van siendo extraídas una por una del mazo con el pulgar de la mano izquierda, y van siendo colocadas alternativamente encima y debajo de las cartas de la mano derecha. «Monge me quiso como se adora a un amante», confesó Napoleón en una ocasión. Monge fue uno de los varios matemáticos franceses que recibieron de Napoleón títulos de nobleza. Cualquiera ha oído hablar de la capacidad geométrica de Napoleón; es mérito suyo haber revolucionado de tal forma la enseñanza de las matemáticas en Francia, que según varios historiadores, sus reformas fueron las causantes de la floración de matemáticos creadores orgullo de la Francia decimonónica.

Al igual que Monge, el joven Mascheroni fue ardiente admirador de Napoleón y de la Revolución Francesa, Además de profesor de la Universidad de Pavía, fue poeta muy considerado por la crítica italiana. Existen varias ediciones italianas de sus poesías completas. Su libro *Problems for Surveyors* tenía una dedicatoria en verso para Napoleón. Ambos hombres se conocieron en 1796, cuando Napoleón invadió el norte de Italia, y llegaron a ser amigos. Un año después, cuando Mascheroni publicó su libro dedicado a construcciones con sólo compás, volvió a honrar a Napoleón con una dedicatoria, esta vez una extensa oda.

Napoleón conocía a fondo muchas de las construcciones de Mascheroni. Se dice que en 1797, mientras Napoleón hablaba de geometría con Joseph Louis Lagrange y Pierre Simon de Laplace (famosos matemáticos a quienes más tarde Napoleón haría conde y marqués, respectivamente) el pequeño general sorprendió a ambos,

explicándoles algunas soluciones de Mascheroni que les eran totalmente desconocidas. Se dice que Laplace comentó: «General, esperábamos de vos cualquier cosa, excepto lecciones de geometría». Sea esta anécdota supuesta o verdadera, Napoleón sí dio a conocer la obra de Mascheroni a los matemáticos franceses. En 1798, un año después de la primera edición italiana, ya se había publicado en París una traducción de la *Geometría del compasso*.

El «problema de Napoleón» consiste en dividir un círculo de centro dado en cuatro arcos iguales, usando exclusivamente un compás. O dicho de otra forma, se trata de hallar los vértices de un cuadrado inscrito. Se muestra en la Figura 91 una hermosa solución, con sólo seis arcos.

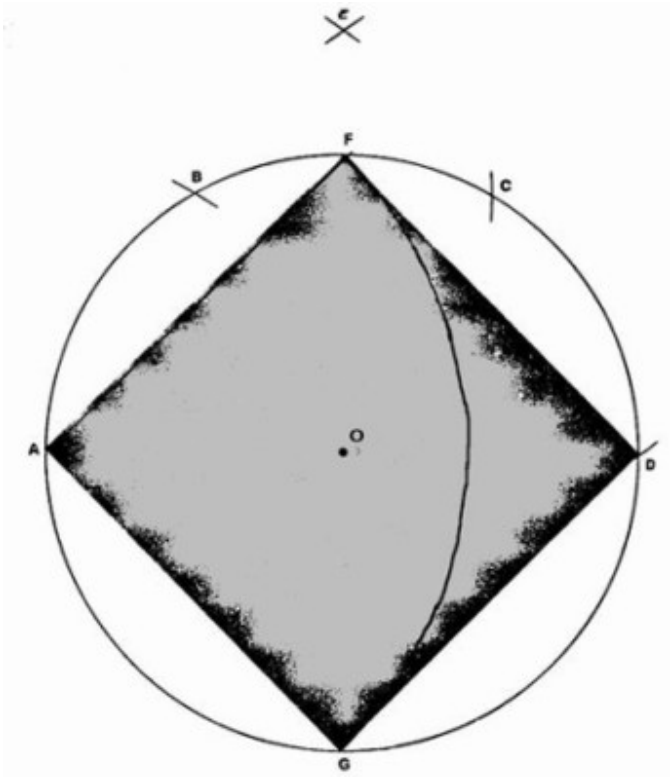


Figura 91. Solución en seis pasos del "Problema de Napoleón"

Tomando con el compás el radio del círculo, y a partir de un punto cualquiera *A* se marca los puntos *B, C* y *D*, haciendo centro en *A, B* y *C* respectivamente. Se abre el compás con radio *AC*. Con centros *A* y radio *DE* se traza el arco que corta a la circunferencia inicial en *F* y *G*. Los puntos *A, F, D* y *G* son los vértices del cuadrado

inscrito. Desconozco si esta solución se debe a Mascheroni (pues su libro no ha sido traducido al inglés, y no he tenido acceso a las ediciones francesa ni italiana), o si se trata de un descubrimiento posterior. Henry Ernest Dudeney la presenta, sin demostración, en su *Modern Puzzles* (1926). Puede verse una demostración sencilla en *Mathematical Quickies*, de Charles W. Trigg (McGrawHill, 1967), problema nº. 248.

Dos problemas relacionados con éste, y no tan conocidos, son: (1) Dados dos vértices adyacentes de un cuadrado, determinar los otros dos, y (2), dados dos puntos diagonalmente opuestos de un cuadrado, hallar los otros dos. Dos lectores, Don G. Olmstead, y Paul White, me enviaron, independientemente uno de otro, soluciones de solo ocho arcos, que pueden verse, con demostración, en *Mathematical Entertainments*, de M. H. Greenblatt (Crowell, 1965), p. 139. Vemos el procedimiento en la Figura 92.

A y *B* son los dos puntos dados. Tras dibujar ambas circunferencias, las dos de radio *AB*, se mantiene la apertura del compás y se trazan los puntos *D* y *E*, haciendo centro en *C* y *D*. Se abre el compás hasta el radio *CE;* usando como centros *A* y *E* se trazan los dos arcos que se interceptan en *G*.

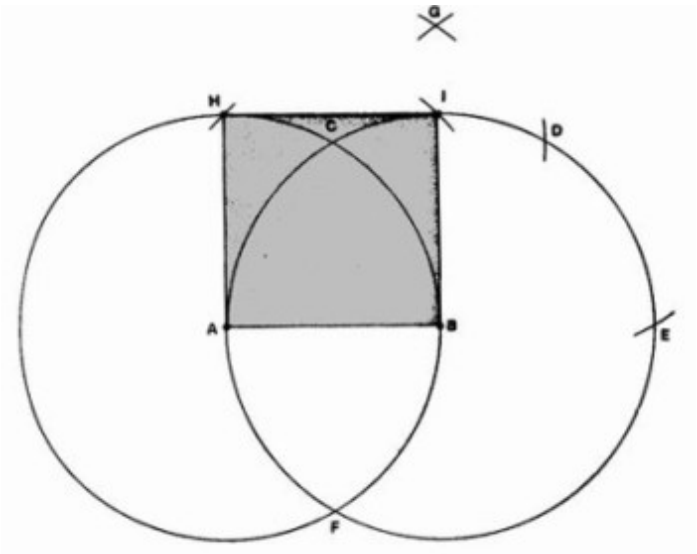


Figura 92. Solución en ocho pasos de la construcción de un cuadrado, conocidos dos vértices adyacentes

Tomando el radio *GB* y haciendo centro en *A* y *B*, se dibujan los arcos que cortan a las circunferencias en *H* e *I* Los puntos *H* e *I* son los otros vértices buscados.
La mejor de las soluciones que conozco del segundo (y más difícil) problema requiere nueve arcos. Invito a los lectores a buscar una, y si es posible, a mejorarla.

Complementos

Mannis Charosh me ha llamado la atención acerca de un teorema tan sorprendente como poco conocido, a saber, que todo punto construible mediante regla y compás puede ser obtenido también disponiendo de una colección ilimitada de mondadientes idénticos. Los palillos sirven para materializar segmentos rectilíneos rígidos e idénticos, libremente desplazables sobre el plano.
Este curioso método de construcción fue inventado por T. R. Dawson, redactor jefe de *Fairy Chess Review*, y ha sido expuesto por él mismo en un articulo titulado «"Match-Stick" Geometry», en *Mathematical Gazette*, Volumen 23, mayo de 1939, pp. 161-68. Dawson demuestra allí el teorema general antes citado, y demuestra también que será imposible construir mediante palillos puntos que no sean construibles por regla y compás. Da métodos para hallar el punto medio de un segmento, la bisectriz de un ángulo, para trazar perpendiculares y paralelas a una recta por un punto dado, así como para otras construcciones suficientes para demostrar su tesis.
Quedan ahora planteados innumerables problemas de carácter recreativo, prácticamente inexplorados, que piden hallar construcciones con número mínimo de palillos. Por ejemplo, el método óptimo de los descubiertos por Dawson para construir un cuadrado de lado unidad (igual a la longitud de un palillo) se muestra en la Figura 93, siendo *AF* una recta cualquiera contenida en el ángulo *BAC*. Se utilizan 16 palillos.

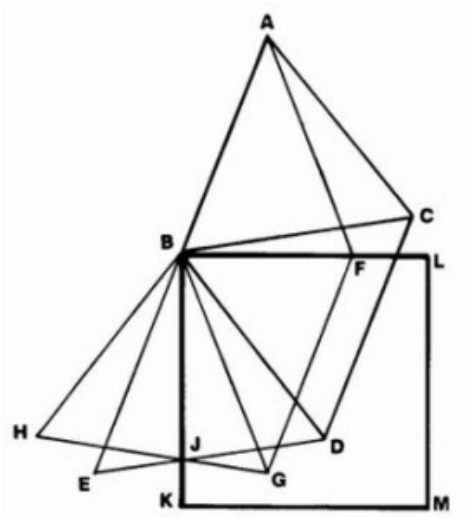


Figura 93. Construcción de un cuadrado con 16 palillos

Dawson afirma que para hallar el punto medio de un segmento de longitud unidad hacen falta cuando menos 11 palillos, y 13 para hallar un punto alineado y equidistante de otros, separados una unidad. Dawson desafía al lector a descubrir un método con 10 palillos para determinar el punto medio de dos puntos separados más de una unidad, pero menos de la raíz cuadrada de 3.

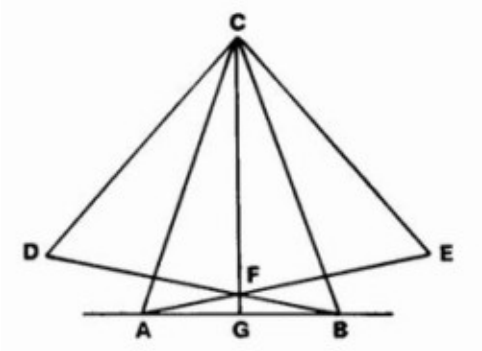


Figura 94. Bisección de un ángulo con cinco palillos

La Figura 94 muestra un método sencillo para bisecar con cinco palillos un ángulo cualquiera no mayor de 120 grados, y distinto de 60 grados. El método permite también trazar la perpendicular desde *C* a la recta *AB*. Para prolongar rectas o trazar rectas paralelas basta ir adosando tantos triángulos equiláteros como sean necesarios.

Soluciones

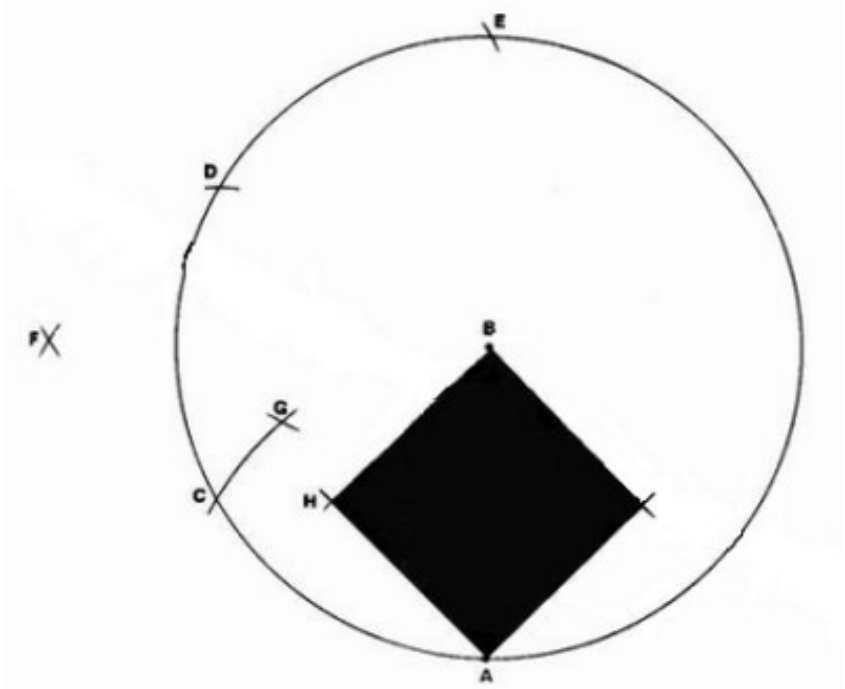


Figura 95. Construcción de un cuadrado, conocidos dos vértices diagonalmente opuestos, usando solo el compás

La Figura 95 muestra una solución en nueve pasos del siguiente problema de Mascheroni: dados dos vértices diagonalmente opuestos de un cuadrado, hallar los otros dos vértices usando solamente el compás. *A* y *B* son los vértices dados. Se traza el círculo de centro *B* y radio *AB*. Conservando la misma apertura de compás, se trazan los arcos *C, D* y *E* (centros en *A, C* y *D*). Con radio *BF* y centro en *E* se traza el arco que intercepta en *G* a otro arco dibujado anteriormente. Tomando el radio *BG* y haciendo centro en *A* y en *B* se trazan los arcos que se cortan en *H* e *I* Los puntos *A, H, B* e *I* son los vértices del cuadrado pedido. Pueden darse demostraciones sencillas de la validez de esta construcción, basadas en que ciertos ángulos son rectos y en el teorema de Pitágoras, que dejamos al cuidado del lector.
Ya publicado mi artículo sobre construcciones de Mascheroni pude confirmar que la solución del «problema de Napoleón» con seis arcos era efectivamente debida a Mascheroni. Fitch Cheney me envió un artículo suyo, «Can We Outdo Mascheroni?»

(*The Mathematics Teacher*, vol. 46, marzo de 1953, pp. 152-156) donde presenta la solución de Mascheroni seguida de otra propia, más sencilla, con sólo cinco pasos.

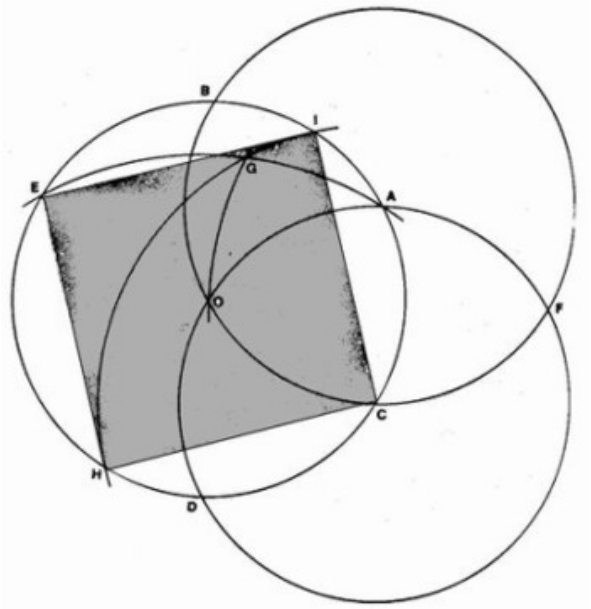


Figura 96. Una solución simplificada del "problema de Napoleón"

Vemos la solución de Cheney en la Figura 96. Se toma un punto cualquiera *A* de la circunferencia dada, y se traza una segunda circunferencia de radio *AO*. Con igual radio, y centro *C* se dibuja una tercera circunferencia; con centro *D* y radio *DA*, trazamos un arco que interseca al círculo inicial en *G*. Con radio *CG* y centro en *C* trazamos un arco que intercepta a la circunferencia inicial en *H* y en *I*. *E, I, C* y *H* definen los vértices del cuadrado pedido.

En su artículo, Cheney nos hace observar la diferencia entre el «compás moderno» que conserva su apertura al levantarlo del papel, como una bigotera, y el «compás clásico» de Euclides, que se cierra tan pronto uno de sus brazos se separa del plano. En contraste a la solución de Mascheroni, la de Cheney utiliza solamente arcos de compás clásico. Cheney da también en su artículo un método clásico, en siete etapas, para inscribir un pentágono en una circunferencia, dos pasos menos que la solución de Mascheroni, pese a que el método de éste requiere el compás moderno.

Muchos lectores se percataron de que el método de Mascheroni para construir un punto alineado y equidistante de otros dos podía abreviarse un paso. La distancia entre las intersecciones de las dos circunferencias de la Figura 89 es, evidentemente, igual a *CE*, por consiguiente, el punto *E* puede hallarse sin necesidad del paso intermedio encaminado a hallar *D*. Este procedimiento automáticamente rebaja en una unidad el número de arcos necesarios para bisecar un segmento, hallar los cuatro vértices de un cuadrado inscrito en un círculo dado («problema de Napoleón»), y dados dos vértices adyacentes de un cuadrado, hallar los otros dos.

El problema de hallar los otros dos vértices de un cuadrado cuando se dan dos vértices en oposición diagonal, problema cuya solución con nueve arcos he presentado ya, puede reducirse a ocho arcos adoptando el procedimiento recién descrito. Sin embargo, más de una docena de lectores descubrieron una preciosa solución con seis arcos (véase la Figura 97).

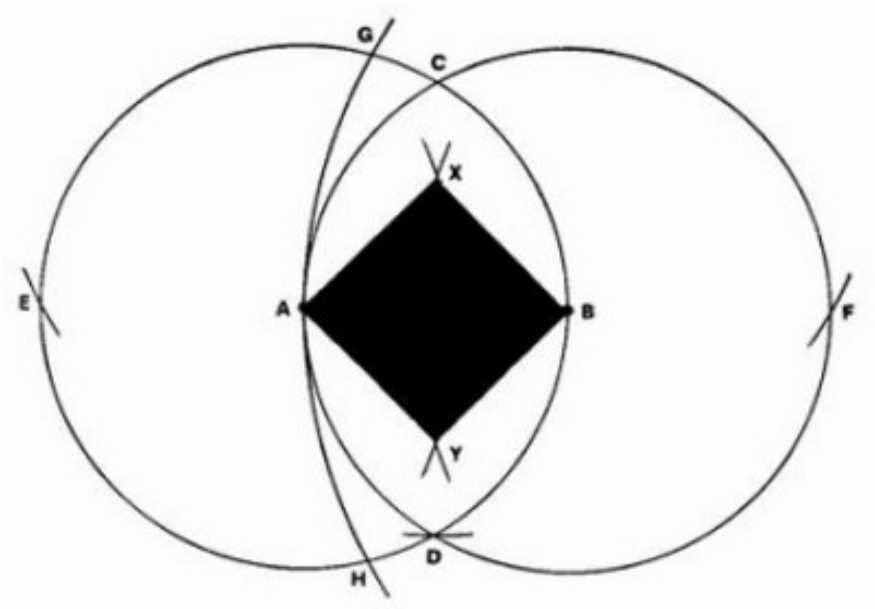


Figura 97. Solución con seis arcos a uno de los problemas de Mascheroni

A y *B* son los vértices dados. Tras dibujar las dos circunferencias que pasan por estos puntos, se abre el compás a la amplitud *CD*, y con centro *C* se traza el arco *EDF*. Con centro *F* y radio *AF* se traza el arco *GAH*. Tomando centros en *E* y *F* y

radio *EG*, se dibujan los dos arcos que se interceptan en *X* e *Y*. No es difícil demostrar que *AXBY* son los vértices del cuadrado requerido.

Capítulo 18
El ábaco

Con el vocablo «ábaco» han sido designados tres instrumentos de cálculo no muy semejantes. El más antiguo y simple, del que se sirvieron muchas culturas antiguas, y entre ellas la griega, no era más que un tablero espolvoreado con una capa de arena oscura, donde se podían trazar con el dedo o un estilete cifras y figuras geométricas. Se cuenta que Arquímedes estaba ayudándose en sus cálculos con una de estas «pizarras de arena» cuando fue muerto por un soldado romano. La palabra griega *abax*, que expresa la idea general de tablero liso o mesa sin patas, pudiera proceder de *abaq*, palabra hebrea que significaba polvo.

Un segundo tipo de ábacos, conocido ya desde el siglo cuarto A. C., y que todavía permanecía en uso durante el Renacimiento, era el tablero de recuento. Se trataba de un auténtico utensilio de cálculo, un computador digital tan genuino como la regla de cálculo lo es en lo analógico. El tablero estaba grabado con líneas paralelas que representaban los lugares de valor relativo de un sistema de numeración, por lo común, de base diez. Estas líneas podían estar trazadas sobre pergamino, esculpidas en mármol, vaciadas en madera e incluso bordadas en paño. Desplazando adelante y atrás sobre las líneas cuentas sueltas podían ejecutarse cálculos sencillos. Los griegos llamaban *abakion* a este tipo de instrumento, y los romanos, *abacus*. Las cuentas utilizadas eran piedrecitas redondeadas que se iban moviendo por los surcos; la palabra latina *calculus*, piedrecita, es por ello madre de nuestros «cálculo» y «calcular». Varias figuras, una de ellas sobre un ánfora griega, muestran cómo se usaba la tabla de recuento. Tan sólo una tabla de recuento griega ha llegado a nuestros días: un rectángulo de mármol de unos 12 por 15 centímetros, descubierto en la isla de Salamis. Durante la Edad Media se usaron, en cambio, tableros divididos en escaques.

El utensilio que hoy conocemos por ábaco es, fundamentalmente, una tabla de recuento modificada, donde las cuentas están ensartadas en alambres o varillas, o alojadas en ranuras. Se desconoce su origen. Los antiguos griegos no llegaron probablemente a conocer este instrumento; las primeras referencias a él se encuentran en textos latinos. Las cuentas, que los romanos llamaban *claviculi*

(clavillos), se deslizaban por surcos, hacia arriba y hacia abajo. Los romanos conocieron varias versiones del artefacto. Particularmente interesante es un pequeño ábaco de bronce que se usó en Italia nada menos que en el siglo XVII, y es interesante porque en su estructura fundamental es idéntico al ábaco japonés de nuestros días. Cada uno de sus surcos verticales representa una potencia de 10, sucesivamente crecientes de derecha a izquierda. En cada surco, cuatro cuentas situadas bajo una línea horizontal sirven para expresar múltiplos del valor del surco, mientras una quinta cuenta, situada sobre la línea, denota cinco veces tal valor.

Tropezamos aquí con una curiosa situación, que ya puso de relieve el matemático alemán Karl Menninger en su libro *Number Words and Number Symbols*. Durante más de quince siglos, los griegos y romanos primero, y los europeos de la Edad Media después se valieron en sus cálculos de dispositivos genuinamente fundados en el principio de valor relativo, en los que el cero estaba representado mediante un surco o línea vacío, o por una posición vacía dentro de la línea o surco. Pese a lo cual, cuando estas mismas gentes tenían que calcular sin auxilios mecánicos, utilizaban incómodos sistemas de notación, no inspirados en el valor relativo de las cifras según su posición, y carentes de notación para el cero. Como dice Menninger, hizo falta mucho tiempo para caer en la cuenta de que sin disponer de un símbolo que exprese el hecho de estar vacío uno de los lugares del número es imposible consignar eficientemente números por escrito.

Tal vez la principal razón de que varias culturas sufrieran tan curioso bloqueo mental fuese la dificultad de lograr papiros o pergaminos. Dado que los cálculos se realizaban casi exclusivamente con ábacos, no había gran necesidad de disponer de notaciones escritas eficientes.

El italiano Leonardo de Pisa, más conocido por Fibonacci, fue quien introdujo en Europa la notación indo-arábiga, en 1202 (véase la página 152). Se produjo entonces una cáustica polémica entre los «abaquistas», aferrados a la notación romana para consignar los resultados de sus cálculos, realizados mediante ábacos, y los «algoristas», que desecharon de raíz la notación romana, sustituyéndola enteramente por la muy superior notación indo-arábiga. El vocablo «algorista» procede del nombre de un autor árabe del siglo noveno, al-Khowârizmî, y es antepasado del moderno «algoritmo». (En la Figura 98 vemos un abaquista

compitiendo con un algorista. La lámina pertenece a un libro del siglo XVI, *Margarita Philosophica*.)

En algunos lugares de Europa el cálculo por «algorismo» llegó a quedar formalmente prohibido por la ley, y tenía que realizarse en secreto. Hubo oposición incluso en algunos países de influencia árabe. La nueva notación no llegó a imponerse por completo hasta el siglo XVI, cuando pudo disponerse de papel en abundancia.

Poco después, la imprenta se encargó de normalizar las formas de los diez guarismos.

El ábaco fue cayendo gradualmente en desuso en Europa e Inglaterra. Todavía hoy sobreviven algunas reminiscencias, en las cuentas de colores de corralitos infantiles, como ayudas en la enseñanza de la notación decimal en los primeros niveles escolares, o para no perder la cuenta, como en los rosarios o los tableros de puntuación de los billares.

Figura 98. Un "abaquista" (derecha) compite con un "algorista". La estampa es del siglo XVI

En cierto modo, es una lástima que así haya sucedido, porque en estos últimos siglos el cálculo con ábaco ha llegado a convertirse en un verdadero arte en los países de Extremo Oriente y en Rusia. Al manejar el ábaco, el calculista experimenta sensaciones múltiples. Ve deslizarse las cuentas, las oye entrechocar, las palpa, todo a un tiempo. Y, desde luego, ninguna calculadora digital puede ofrecer una fiabilidad tan grande en proporción al mínimo costo de adquisición y mantenimiento del ábaco.

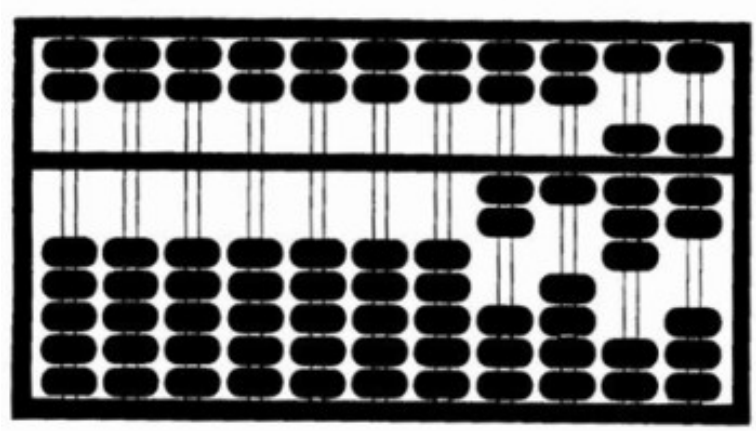


Figura 99. Un suan pan chino, donde vemos el número 2.187

Hay en nuestros días tres tipos de ábaco en uso constante. El «suan pan» chino, también usado en Corea (véase la Figura 99) está formado por cuentas parecidas a rosquillas pequeñas, que se deslizan sin apenas rozamiento a lo largo de varillas de bambú. Cada vástago porta cinco cuentas (unos) por debajo de la barra, y dos más (cincos) por encima.

El ideograma chino *suan*, «calcular», ha sido tomado del libro de Menninger; vemos en él un ábaco sostenido por debajo por el ideograma correspondiente a «manos», y adornado por arriba con el símbolo «bambú». Se ignora el origen del *suan pan*. En

el siglo XVI se disponía ya de descripciones precisas, pero sin duda el instrumento tiene varios siglos más de antigüedad.

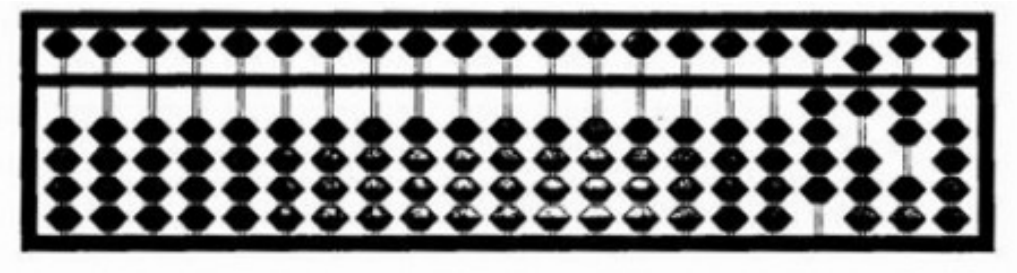


Figura 100. Un soroban japonés moderno, mostrando el número 4.620

El origen del *soroban* japonés (véase la Figura 100) puede remontarse también al siglo XVI, época en que fue traído de China. Sus cuentas tienen probablemente filos vivos; son como dos conos pegados por sus bases. Cada varilla tiene solamente una cuenta por encima de la barra, en la región que los japoneses llaman «cielo», y otras cuatro más por debajo, en la «tierra». (Antiguamente, el instrumento tenía cinco cuentas en la parte inferior de las varillas, lo mismo que su análogo chino, pero la quinta cuenta fue eliminada hacia 1920. Las dos cuentas extra del *suan pan* no son esenciales en el cálculo moderno, y suprimiéndolas se logra un instrumento más sencillo.) Todavía hoy se celebran anualmente en Japón concursos de cálculo con ábaco, y el *soroban* sigue utilizándose en tiendas y pequeños negocios, si bien los bancos y empresas grandes lo han sustituido por modernas calculadoras de mesa.

No han faltado ocasiones de encuentros y justas entre abaquistas japoneses o chinos enfrentados a operadores occidentales de máquinas de cálculo digital. Quizá la ocasión más sonada fue en 1946, en Tokio, cuando el soldado Thomas Wood quedó empatado con Kiyoshi Matsuzaki. El abaquista fue siempre más rápido en todos los cálculos, excepto al multiplicar números muy grandes. Una de las razones que explican la gran velocidad de los abaquistas orientales, es preciso admitirlo, es que ejecutan mentalmente gran parte del trabajo, sirviéndose del ábaco sobre todo para registrar etapas del proceso.

El principal defecto del cálculo con ábacos es la imposibilidad de guardar registro de los cálculos anteriores. De cometerse un error es preciso rehacer el cálculo

completo. Para evitarlo, las firmas japonesas solían hacer que tres calculistas resolvieran simultáneamente el mismo problema. Si las tres soluciones coinciden se admiten como buenas, según la regla dada por el Campanero en *The Hunting of the Snark*, de Lewis Carroll: «Lo que tres veces te digo, ha de ser cierto».

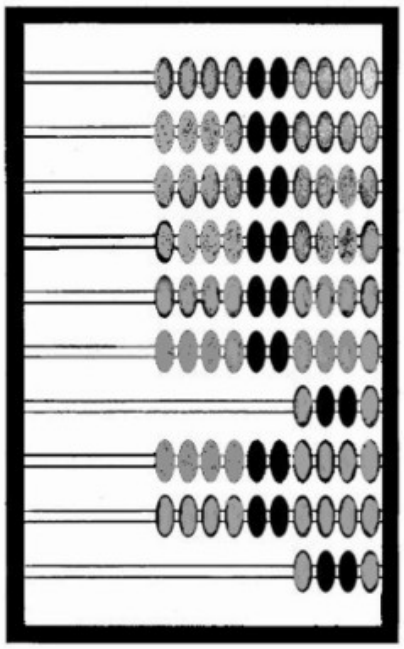


Figura 101. un s'choty ruso

El *s'choty* usado en Rusia (véase la Figura 101) difiere considerablemente de los ábacos orientales. Probablemente los rusos llegaron a conocerlo a través de los árabes; todavía es empleado en ciertas regiones de la India y del Oriente Medio, donde los turcos lo llaman *coulba*, y los armenios, *choreb*. En la Rusia moderna, la situación es casi idéntica a la japonesa: casi todos los tenderos y pequeños comerciantes utilizan ábacos, mientras que en los departamentos de contabilidad de las empresas importantes han sido reemplazados por modernos ordenadores y calculadoras. El *s'choty* está formado por varillas o alambres horizontales, que casi siempre contienen diez cuentas; las dos cuentas centrales son de distinto color para indicar por dónde deben separarse. Las varillas de cuatro cuentas que vemos en la ilustración se usan para fracciones de rublo o kopeck.

En estos últimos años se ha reconocido la gran utilidad del ábaco para enseñar aritmética a los niños ciegos. Se han diseñado ábacos especiales para reducir el

rozamiento. Terrance V. Cramer ha diseñado un *soroban* que bajo las cuentas, esféricas, lleva un freno de espuma de goma y fieltro para evitar el desplazamiento de las cuentas por accidente. Puede solicitarse a *The American Pinfing House for the Blind*, 1839 Francfort Avenue, Louisville, Ky, 40206. Esta firma vende también un manual en braille, por Fred Gissoni. Para evitar que las cuentas del *soroban* puedan agruparse involuntariamente, Víctor E. Haas se sirve de la gravedad, colocándolas en arcos de alambre que se curvan en semicírculo, principio que también aplican algunos ábacos rusos, aunque no de forma tan exagerada.

No es demasiado difícil sumar con maestría mediante el ábaco. Los lectores que no tengan tiempo o interés en aprender los movimientos dactilares correspondientes a la sustracción (en el ábaco los movimientos deben ser automáticos; de nada valdría si fuese necesario pararse a pensar cómo ejecutar a la inversa los movimientos de la adición), pueden beneficiarse de un antiguo método de restar con el ábaco mediante adición. En lugar de restar el sustraendo, se suma al minuendo el complemento a 9 de cada cifra del sustraendo. Por ejemplo: deseamos restar 9.213 de 456.789 con un ábaco oriental. Se coloca en ábaco el número 456.789. Mentalmente pondremos dos ceros delante del 9.213, para hacerlo de la misma longitud que el minuendo. Se suman entonces los dígitos por pares, en la forma habitual, pero de izquierda a derecha (y no de derecha a izquierda, como solemos hacer con lápiz y papel) teniendo en cuenta que en lugar de las cifras de 009.213 debemos tomar su diferencia con 9. En resumen, a 456.789 le sumaremos 990.786. Al resultado, 1.447.575, debemos darle un último retoque. Eliminamos la única cuenta de la izquierda, y añadimos una unidad al último dígito del extremo derecho. Se logra así la solución correcta, 447.576. En la práctica este último reajuste se elude no subiendo la cuenta de la izquierda al hacer la primera suma, y pasando una de más en la última. También podemos ahorrarnos añadir ceros extra a la izquierda de un sustraendo pequeño, acordándonos de separar una cuenta, no del extremo izquierdo, sino del primer guarismo situado a la izquierda del número de cifras del sustraendo.

La sustracción por adición de complementos se utiliza en los computadores electrónicos. El método es aplicable a cualquier sistema de numeración, teniendo en cuenta, desde luego, que los complementos deben tomarse con respecto a la base

de numeración rebajada en una unidad. Así, en el sistema de base 12 se tomarán complementos respecto de 11. En los ordenadores electrónicos, donde se usa el sistema binario, la complementación es sencilla, pues equivale a cambiar cada 0 por un 1, y cada 1 por 0. Es evidente que pueden construirse ábacos correspondientes a notaciones de cualquier base. Es fácil adaptar los ábacos orientales a ciertas otras bases. Para el cálculo binario se usa únicamente la porción «cielo» del *soroban*. La región «tierra» puede usarse para el sistema de base 5. Análogamente, el *suan pan* puede usarse con sistemas de base 3 ó 6. Para trabajar en base 4, nos quedamos con las tres cuentas situadas bajo la barra central de cualquiera de estos instrumentos. Y para el sistema de base 12 se usará el ábaco chino, asignando a las cuentas situadas sobre la barra no el valor 5, sino el 6.

Hay un excelente ejercicio para practicar la adición con ábaco, relacionado con un viejo truco numérico que a veces recuerdan los maestros de primaria. Se escribe en la pizarra el «número mágico» 12.345.679 (obsérvese que falta el 8). Se le pide a un niño que salga y diga un número de una cifra. Supongamos que se decida por el 7. El profesor escribe entonces 63 bajo el 12.345.679, y le dice al niño que haga la multiplicación. Resulta, esperamos que para regocijo de todos, que el producto está formado exclusivamente por sietes. (Para hallar el multiplicador el maestro multiplica por 9 la cifra elegida por el alumno.)

Para ejercitarnos en el manejo del ábaco con este número mágico, pongamos 12.345.679 en el instrumento, y sumemos el mismo número ocho veces, lo que equivale a multiplicarlo por 9. Si las ocho sumas se han efectuado correctamente, el ábaco mostrará una fila de 1s (cuentas sueltas adosadas a la parte baja de la barra). Sumemos otras nueve veces este número mágico, y obtendremos una hilera de 2s. Nueve adiciones más forman una hilera de 3s, y así sucesivamente, hasta que tras 80 adiciones se logra una hilera de 9s. Este ejercicio hace intervenir todos los movimientos de dedos. Además, es fácil comprobar la exactitud del trabajo en nueve momentos del proceso, y cronometrando cada etapa se puede saber cuánto se va mejorando de día en día.

Hay infinitos otros números mágicos que tienen la misma propiedad que 12.345.679 cuando se los multiplica por el producto de una cierta constante y de un dígito cualquiera. Así, el producto de 37 y 3*d* está formado exclusivamente por *d*s. Por

ejemplo, 37 x (3 x 8) = 888. Para 7*d*, el mínimo número mágico es 15.873, para 13*d* es 8.547, y para 99*d* es 1.122.334.455.667.789. No cuesta mucho descubrir nuevos números de este tipo. He aquí una pregunta fácil: ¿cuál es el mínimo número mágico para 170. Con otras palabras, ¿cuál es el número que multiplicado por 17*d*, siendo *d* un dígito cualquiera, da un producto formado exclusivamente por la cifra *d*?

Soluciones

El problema consistía en hallar el mínimo número que multiplicado por 17*d*, siendo *d* un número cualquiera de una sola cifra, da un producto formado exclusivamente por cifras *d*?

Evidentemente, al multiplicar este número por 17 debe obtenerse una hilera de 1s. Por consiguiente, iremos dividiendo 111... entre 17, hasta lograr un resto igual a 0. Así sucede por primera vez cuando el cociente es 65.359.477.124.183, que es la solución del problema. Como al multiplicar este número por 17 resulta 1.111.111.111.111.111, al multiplicar por 17 x 2 = 34 se obtendrá una hilera de 2s, y así sucesivamente para los demás dígitos.

Dado que el decimal periódico 0,111 ... es igual a 1/9 es decir, el inverso de 9, puede demostrarse que todo número entero mágico es el período de un número decimal recíproco del producto de 9 por números impares que no sean múltiplos de 5. En nuestro ejemplo, el número mágico es el período de la expresión decimal de 1/153 recíproco del producto de 9 y 17. Un ejemplo de número mágico no entero es 1,375. Al multiplicarlo por 8*d* el producto estará formado exclusivamente por *d*s, despreciados los ceros situados a la derecha de la coma decimal.

Capítulo 19
Palíndromos numéricos y verbales

De manera general, se llaman «palíndromas» a palabras, frases e incluso grupos de frases que pueden leerse, con idéntico resultado, tanto en el sentido progresivo, de izquierda a derecha, el habitual, como en sentido retrógrado. En España, los números palindrómicos suelen llamarse «capicúas». Los aficionados a charadas y juegos de palabras, así como los numerólogos de todo pelaje, se han interesado desde siempre por la palindromía de todo tipo, seguramente a causa del profundo y semi-insconsciente placer estético que nos causa la peculiar simetría de los palíndromos. Los palíndromos no carecen de homólogos en otros campos: hay melodías que pueden ejecutarse desde el final hacia adelante; hay dibujos y pinturas concebidos con simetría axial; casi todos los animales muestran simetría bilateral, simetría con respecto a un plano, especialmente el hombre (véase la Figura 102).

Figura 102. Un palíndromo visual: la gaviota en vuelo

En este capítulo restringiremos nuestra atención a palíndromos numéricos y verbales, y echaremos un vistazo a algunos recientes progresos en este campo.
Una clásica conjetura sobre palíndromos, de origen desconocido (se encuentran referencias a ella en textos de los años 30) es como sigue. Se toma un número entero positivo cualquiera. El número se escribe entonces en orden inverso; los dos números se suman. El proceso se repite con el número suma, obteniéndose entonces una segunda suma, y se prosigue de igual forma hasta lograr un capicúa. La conjetura afirma que tras número finito de adiciones terminará por obtenerse un capicúa. Por ejemplo, 68 genera un capicúa en tres pasos:

```
    68
+   86
   154
+  451
   605
+  506
 1.111
```

En el caso de números de dos dígitos, es evidente que si sus cifras suman menos que 100, ya en el primer paso se obtendrá un palíndromo bidígito. Si las cifras del número suman 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 ó 18, se obtienen palíndromos tras 2, 1, 2, 2, 3, 4, 6 y 6 etapas, respectivamente. Mas, como Angela Dunn hace notar en sus *Mathematical Bafflers* (McGraw-Hill, 1964), los números bidigitos cuyas cifras sumen 17 son excepcionales. Únicamente 89 (y su retrógrado, 98) cumplen tal requisito. Y al comenzar por cualquiera de ellos, no se logran capicúas hasta la vigésimo cuarta repetición del proceso, que da 8.813.200.023.188.

Hasta hace poco, la opinión general era que la conjetura resultaría cierta, pese a que nadie había logrado demostrarla. En 1967, Charles W. Trigg, matemático californiano famoso por sus contribuciones a las matemáticas recreativas puso mayor cuidado en el análisis del problema en su articulo «Palindromes by Addition». Trigg descubrió que entre los enteros menores que 10.000 había nada menos que 249 que no generaban palíndromos aún después de ejecutar 100 veces el proceso. El menor de tales números es 196; en 1975, Harry J. Saal realizó en el Centro Científico de Israel 237.310 iteraciones a partir de él, sin presentarse nunca sumas palindrómicas. Actualmente, Trigg opina que la conjetura es falsa. (El número 196 es cuadrado de 14, pero seguramente tal cosa carezca de importancia). Aparte las 249 excepciones mencionadas, todos los enteros menores que 10.000 producen capicúas en no más de 24 iteraciones, y tan sólo 89 y 98 requieren las 24. De los capicúas así producidos, el mayor es 16.668.488.486.661, que es generado por 6.999 (y su retrógrado), o por 7.998 (y su retrógrado) en 20 pasos.

Hasta ahora, la conjetura no ha sido demostrada en ningún sistema de numeración. Por otra parte, sí se ha demostrado que es falsa cuando la base del sistema sea potencia de 2. (Véase el artículo de Heiko Harborth mencionado en la Bibliografía.) En el sistema binario, el menor de los contraejemplos lo da 10110 (equivalente al 22 del sistema decimal). Tras efectuar cuatro iteraciones, la suma resulta

10110100; tras ocho pasos es de 1011101000, y tras doce, 101111010000. Cada cuatro iteraciones se añade una nueva cifra a la secuencia de dígitos subrayados. En «Palindromes by Addition in Base Two», Alfred Brousseau demuestra que esta pauta asimétrica se repite indefinidamente. Brousseau ha descubierto también otras pautas asimétricas repetitivas en números binarios más grandes.

Existe una pequeña, aunque creciente, literatura sobre propiedades de los números primos palindrómicos, y sobre todo, de conjeturas al respecto. En apariencia existen infinitos números primos de este tipo, mas, que yo sepa, nada se ha demostrado. En cambio, no es difícil probar que todo número primo capicúa, exceptuado el 11, ha de estar formado por número impar de cifras. ¿Logrará probarlo el lector, sin consultar la sección de soluciones del capítulo? Norman T. Gridgeman ha conjeturado que existen infinitos pares de primos emparejados, de la forma 30103, 30203, ó 9.931.399, 9.932.399 donde todas las cifras son idénticas menos las centrales, que difieren en una unidad. La conjetura, curiosa, dista de estar demostrada.

Gustavus J. Simmons ha escrito dos artículos sobre palíndromos que sean potencias de algún número natural. Tras demostrar que la probabilidad de que un número tomado al azar resulte palíndromo tiende hacia 0 conforme aumenta el número de cifras. Simmons entra a estudiar la sucesión de los cuadrados, encontrando en ella mayor riqueza de capicúas que entre los enteros cualesquiera. Hay una infinidad de cuadrados perfectos palindrómicos, que en su mayoría, parece ser, tienen raíces cuadradas también palindrómicas. (La menor de las raíces no palindrómicas es 26.) También los cubos son rico venero de palíndromos. Una inspección computarizada de todos los cubos menores que 2,8 x 1014 hizo ver un hecho en verdad estupefaciente. Entre los examinados por Simmons, el único cubo palindrómico cuya raíz cúbica no es capicúa es 10.662.526.601. Ya Trigg se habla fijado en su raíz cúbica, 2.201, observando en 1961 que 2.201 es el único número no palindrómico que posee cubo capicúa menor que 1.953.125.000.000. Se ignora todavía si 2.201 será el único número entero no capicúa que posea cubo palindrómico.

Con auxilio de ordenador, Simmons estudió también las cuartas potencias, a la caza de capicúas. Su exploración, llevada hasta igual límite que con los cubos, no permitió encontrar un solo ejemplo de cuarta potencia palindrómica cuya base (la

raíz cuarta) no fuese también palindrómica y de la forma general 10... 01. Para las potencias de exponentes comprendidos entre 5 y 10, inclusive, el ordenador no descubrió ningún capicúa, salvo el 1, que es trivial. Simmons conjetura que no existirán capicúas de la forma *X*k cuando *k* sea mayor que 4.

Los «repetunos» son números formados exclusivamente por repetición de la cifra 1. Al elevarlos al cuadrado, los repetunos producen capicúas mientras el número de cifras va de 1 a 9, pero a partir de 10 ó más unos, los cuadrados ya no son palindrómicos. Se ha afirmado erróneamente que tan sólo los números primos pueden tener cubo capicúa, mas hay infinitos enteros que prueban la falsedad de tal afirmación, y el menor de ellos es el repetuno 111. Es divisible por 3, y su cubo, 1.367.631, es capicúa. También el número 836 reviste especial interés, por ser el máximo entero de tres cifras cuyo cuadrado, 698.896, es palindrómico, y al mismo tiempo, ser 698.896 el mínimo de los cuadrados palindrómicos formado por número par de cifras. (A observar también que este número sigue siendo palindrómico al volverlo boca abajo.) Los cuadrados capicúas como éste son de rareza superlativa. El siguiente de los formados por número par de cifras es 637.832.238.736, que es el cuadrado de 798.644.

Echemos ahora un vistazo a los palíndromos verbales. Las palabras capicúas de siete letras, como «RODADOR» o «ANILINA» ya son francamente raras. Los ejemplos más largos que conozco son RECONOCER y, con la licencia de formas verbales compuestas, SALABALAS. La palabra «RADAR» (Radio-detecting and ranging) es un palíndromo notable, por haber sido acuñada con la intención de sugerir la reflexión de las ondas de radio. Dmitri Borgmann, cuyos archivos contienen miles de palabras y frases palíndromas en todos los idiomas, afirma en su libro *Language on Vacation* que la más larga palabra palíndroma conocida es saippuakauppias, que en finés significa «vendedor de jabón».

Entre los nombres propios palindrómicos, topónimos incluidos, ninguno es más largo, según Borgmann, que Wassamassaw, comarca pantanosa situada al norte de Charleston, en Carolina del Norte. Según la leyenda, escribe Borgmann, se trata de una palabra india que significaba «el peor lugar jamás visto». Una panadería, la Yreka Bakery, opera desde hace tiempo en la West Miner Street de Yreka, Calif. El antiguo primer ministro camboyano, Lon Nol, tenía nombre capicúa, lo mismo que U

Nu, ex-primer ministro de Birmania. Revilo P. Oliver es un profesor de clásicas de la Universidad de Illinois que tiene igual nombre que su padre y su abuelo; según parece, el nombre fue compuesto con la intención de lograr que su filiación fuese palíndroma. Ignoro si existen personas con señas de identidad más largas, aunque Borgmann sugiere posibilidades como Norah Sara Sharon, Edna Lala Lalande, Duane Rollo Renaud, Anabel Ebana, y muchas más.

Existen en todos los idiomas centenares de excelentes frases palindrómicas. El lector interesado puede hallar buenas colecciones en el libro de Borgmann ya citado, y también en el de Howard Bergerson. Por mi parte, he dado algunos ejemplos en un capitulo sobre juegos de palabras de mi «¡Ajá!» (Editorial Labor). Para los insomnes, una buena forma de ir haciendo pasar las horas de vigilia puede ser la composición de palíndromos. Me limitaré aquí a mencionar un palíndromo poco conocido, pese a que su longitud y naturalidad lo hacen verdaderamente notable: «Doe, note, I dissent. A fast never prevents a fatness. I diet on cod.» («Mira, viejo, no estoy de acuerdo. El ayuno nunca consigue evitar la gordura. Yo hago dieta de bacalao»). Esta verdadera proeza le valió un premio a James Michie en un concurso de palíndromos patrocinado por el *New Statesman*; los resultados se publicaron en el número de 5 de mayo de 1967. Muchos de los palíndromos premiados eran mucho más largos que el de Michie, pero como suele ocurrir, los palíndromos largos son invariablemente difíciles de descifrar. (El traductor se permite citar aquí tres palíndromos en castellano. El famoso «Dábale arroz a la zorra el abad» figura en muchos diccionarios. Breve, aunque muy natural, es «Anita lava la tina». Por fin, uno debido al escritor Julio Cortázar: «Anás usó tu auto, Susana».)

Para hacer más verosímiles e inteligibles sus palíndromos largos, los especialistas se han valido de diversos recursos, corno presentarlos en forma telegráfica, como mitades de conversaciones telefónicas, etc. Leigh Mercer, uno de los más destacados palindromistas ingleses (es inventor del famoso «A man, a plan, a canal, Panama!») ha sugerido un procedimiento para escribir palíndromos de longitud tan grande corno se quiera. La frase de Mercer tiene la forma «"------" sides reversed, is "-----"», que en castellano quedaría (algo lisiada): «"-----" al revés se verá "-----". El primer espacio en blanco puede ser cualquier sucesión de letras, de longitud arbitraria, que en el segundo hueco deberemos copiar en sentido inverso.

Aunque excepcionalmente raros, hay algunos buenos palíndromos basados en nombres de presidentes. Borgmann cita entre los mejores, por su tersura y brevedad, el incisivo «Taft: fat!». El nombre de Richard Nixon se presta a «No "*x*" in "Mr. R. M. Nixon"», aunque la frase es un poco artificial. Otra versión simplificada, con mayúsculas, NO X IN NIXON [2], no sólo es palindrómica, sino invertible.

En inglés, «God» significa Dios, y su retrógrada, «dog», perro. Este hecho ha sido útil para muchos palíndromos, y sorprendentemente, también ha sido empleado en psicoanálisis ortodoxo . En *Freuds Contribution to Psychiatry*, A. A. Brill cita un análisis bastante traído por el rabo, que Carl Jung y otros realizaron sobre un paciente que sufría de una especie de tic que le inducía a levantar compulsivamente los brazos. Los psicoanalistas llegaron finalmente a la conclusión de que el tic tuvo origen en una desagradable experiencia visual relacionada con perros. A causa de la simetría «dog»-«god», y en vista de las convicciones religiosas del paciente, su «id» había llegado a provocar el gesto, que simbolizaba la repulsión y rechazo del maligno «dog-god».

Una especialidad del británico J. A. Lindon, otro gran especialista en palíndromos, son frases capicúas cuyas unidades no son letras, sino palabras. He aquí dos espléndidos ejemplos entresacados entre los muchos que Lindon ha construido.

«You can cage a swallow, can't you, but you can't swallow a cage, can you?» (Podemos enjaular una golondrina, verdad, pero no podemos tragarnos una jaula, no es cierto?).

«Girl, bathing on Bikini, eyeing boy, finds boy eyeing bikini on bathing girl». (Bañándose, chica en Bikini, al mirar chico, ve chico mirar al bikini de chica bañándose.)

Se han hecho muchos intentos de componer poemas palindrómicos cuyas unidades fuesen letras, pero sin excepción todos son difíciles de comprender, faltos de rima y carentes de valores poéticos. Han podido lograrse poemas algo mejores tomando como palíndromos sólo los versos del poema, y no el poema completo, o usando como unidades de inversión no letras, sino palabras. Lindon ha escrito no pocos de estos tipos. Un tercer tipo de palíndromo, inventado por él, se vale de los versos

---

[2] Puede traducirse por «En Nixon no hay incógnitas».

como unidades. El poema puede leerse de arriba a abajo o de abajo a arriba, los versos se leen del modo ordinario. Como es evidente, puede ser necesario alterar la puntuación de las frases. El siguiente es uno de los mejores trabajos de Lindon en esta faceta:

As I was passing near the jail
I met a man, but hurried by.
His face was ghastly, grimly pale.
He had a gun. I wondered why
He had. A gun? I wondered... why,
His face was ghastly! Grimly pale,
I met a man, but hurried by,
As I was passing near the jail.

(Yendo yo junto a la cárcel
Me tropecé con un tipo; apuré el paso.
Su rostro era atroz, pálido como un cadáver.
Tenía un revólver. Me pregunté por qué
Lo tenía. ¿Un revólver?, me pregunté... ¿Por qué?
Su rostro era ¡atroz! Pálido como un cadáver
Me tropecé con un tipo; apuré el paso
Yendo yo junto a la cárcel.)

Lindon posee también el record de la palabra más larga que jamás haya podido introducirse en una frase palíndroma letra por letra. Para comprender el palíndromo es necesario saber que Beryl tiene un marido amante de corretear por el jardín de su casa sin ninguna ropa encima. Ned le pregunta si lo hace para fastidiar a su esposa. He aquí la respuesta: «Named undenominationally rebel, I rile Beryl? La, no! I tan. I'm. O Ned, nude, man.I». (¿Rebelde descreído yo? ¿Molestar a Beryl? ¡Ned, muchacho, estoy desnudo para broncearme!)

Apéndice

A. Ross Ecker, redactor y editor de *Word Ways*, revista trimestral dedicada a juegos de palabras donde han sido publicados docenas de artículos sobre toda especie de palíndromos, me escribió diciendo que quizás el «vacío palindrómico» entre el inglés y otros idiomas no fuera tan grande como pudiera temerse. Así, la palabra *semitime* (que figura en el *Websters Second*) puede pluralizarse, y dar un palíndromo de 9 letras. En el *Webster's Third* figura «kinnikinnik». Además, decía Eckler, ya Dmitri Borgmann ha hecho notar en *Word Ways* que la consulta de varios diccionarios no había permitido encontrar palabras palindrómicas tan largas como la finesa «vendedor de jabón», lo que hacía pensar que se trata de palabras artificialmente construidas.

Entre las ciudades y villas norteamericanas con nombres palindrómicos, Borgmann dio con Okonoko (en Virginia Occidental). Admitiendo que la abreviatura del estado forme parte del palíndromo, tendremos Apollo, Pa., y Adaven, Nevada. Algunas ciudades de EE.UU., proseguía Ecker, tienen deliberadamente nombres retrógrados uno de otro, como Orestod y Dotsero, en Eagle County, Colorado o Colver y Revloc, en Cambria County, Pennsylvania. Nova y Avon, añadía Eckier son ciudades de Ohio que forman par retrógrado, pero no premeditado.

George L. Hart III envió la carta siguiente, publicada en *Scientific American* en noviembre de 1970:

Señores:

Con respecto a su articulo sobre palíndromos, me gustaría ofrecer un ejemplo del que en mi opinión es el más exquisito y complejo tipo de palíndromos jamás inventados. Fue ideado por los estetas sánscritos, quienes lo denominaron *sarvalobhadra*, esto es, «perfecto en todas direcciones. El más famoso modelo lo encontramos en el poema épico titulado *Sisupálavadha*.

sa, kä – ra – nä –nä, ra, kä , sa –
kä, ya, sä, da, da, sä, ya – kä
ra – sä – ha, vä – vä – ha – sä – ra
nä, da, vä, da, da, vä, da, nä.

(nä da vä da da vä da nä
ra sä ha vä vä ha sä ra
kä ya sä da da sä ya kä

sa kä ra nä nä ra kä sa)

Los guiones se usan para indicar que la sílaba consecutiva pertenece a la misma palabra. Los últimos cuatro versos son retrógrados de los cuatro primeros, y aunque no forman parte del poema, han sido añadidos para más resaltar sus propiedades. La estrofa es descripción de un ejército, y significa más o menos: «(ese ejército), que ansiaba la batalla (rasähavä) contenía aliados que echaron abajo los agüeros y el trote de los caballos de sus diversos rivales enemigos (sakäranänärakäsakäyasädadasäyakä), y en él, los gritos de las mejores monturas contendían con los instrumentos musicales (vähasäranädavädadavadana)».

Dos lectores me hicieron llegar la triste noticia de que la Yreka Bakery ha desaparecido ya. Empero, en 1970 su razón social estaba ocupada por la Yrella Gallery; uno de los lectores adjuntó una fotografía Polaroid del escaparate de la galería, para demostrarlo. Ignoro si la galería sigue allí o no.

Soluciones

Se les pedía a los lectores demostrar que ningún número primo, salvo el 11, podía ser palindrómico y tener número par de dígitos. La demostración se apoya en un conocido criterio de divisibilidad por 11 (que no demostraremos aquí), a saber, que si la diferencia entre las cifras de lugar par y la suma de las situadas en lugar impar es cero o múltiplo de 11, entonces el número es múltiplo de 11. Cuando el palíndromo tiene un número par de cifras, para cada cifra de lugar impar hay otra igual situada en lugar par; por consiguiente, la diferencia entre las sumas de ambos grupos tiene que ser igual a 0.

El mismo criterio de divisibilidad es válido en todos los sistemas de numeración cuando el divisor a ensayar es igual a la base del sistema más una unidad. Ello demuestra que ningún palíndromo de número par de dígitos puede ser primo en ningún sistema de numeración, salvo posiblemente el denotado 11. Este número (11) solamente será primo cuando la base del sistema sea igual a un número primo menos una unidad, como sucede en el sistema decimal ordinario.

Capítulo 20
Billetes

Notable variedad de pequeños objetos producidos por el hombre se prestan bien a rompecabezas y trucos, siendo éstos, no pocas veces, de carácter matemático. Vamos a echar ahora una ojeada a ciertos aspectos curiosos del papel moneda.

Los ilusionistas conocen bien un sorprendente truco de papiroflexia, donde solamente se realizan operaciones de simetría, basado en la forma rectangular de los billetes. El «mago» sostiene horizontalmente el billete, sujetándolo por los extremos, con el busto de la figura del anverso cabeza arriba (véase la Figura 103).

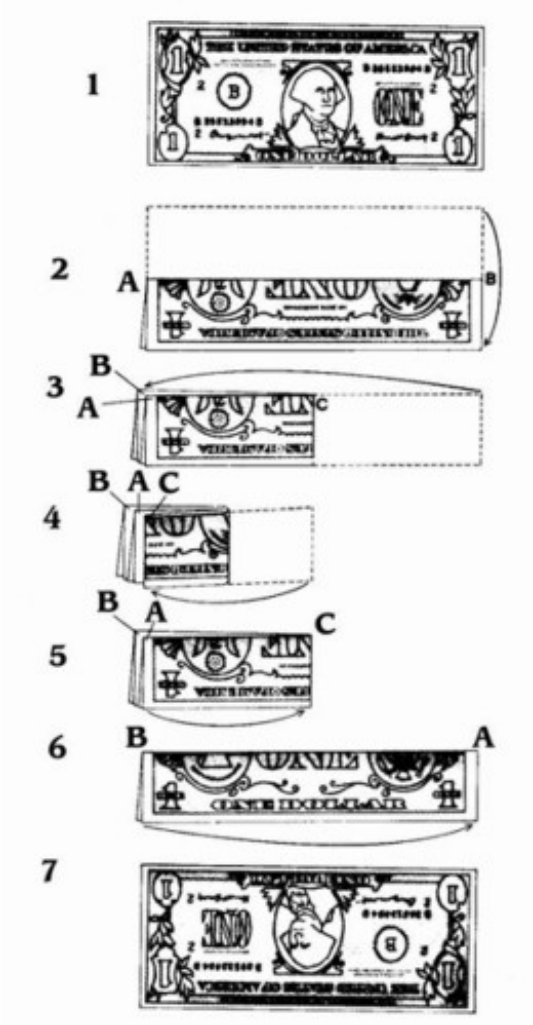


Figura 103. Cómo hacer una bonita inversión con un dólar.

Dobla entonces el billete longitudinalmente por la mitad, después vuelve a doblarlo transversalmente por el centro, hacia la izquierda, y por fin, lo dobla una vez más hacia la izquierda. Hecho ésto desdobla el billete, deshaciendo, a lo que parece, las tres dobleces anteriores. ¡Y ahora el busto ha quedado cabeza abajo! Mas cuando otros intentan repetirlo, la figura se niega obstinadamente a cambiar de posición.

El secreto se encuentra en la segunda doblez. Notemos que al ejecutarla, la mitad derecha queda situada detrás de la mitad izquierda. El tercer pliegue se realiza también hacia la izquierda, pero con la mitad derecha por delante. Al deshacer las dobleces ambas se abren hacia delante, lo que produce el efecto de hacer girar el billete media vuelta en torno a un eje vertical, como podemos ver comparando el billete en los pasos 2 y 6. Incluso comprendiendo lo que sucede, el resultado final produce siempre alguna sorpresa. Es necesario practicar hasta realizar los tres pliegues con soltura y rapidez. En cambio, al desplegar, debemos actuar con lentitud premeditada, mientras anunciamos (los magos tienen el privilegio de mentir con convicción) estar deshaciendo cuidadosamente los pliegues que antes dimos, del último al primero.

Los aficionados al *orígami* (nombre japonés del arte de la papiroflexia) han dedicado mucho tiempo a idear procedimientos para lograr que plegando un billete resulten cosas corno anillos, lazos de pajarita, pavos reales, o conejitos saliendo de un sombrero. Tanto así que sobre el tema han sido publicados dos tratados por la *Ireland Magic Company* de Chicago: *The Folding Money Book*, por Adolfo Cerceda (1963), y *The Folding Money Book Number Two*, por Samuel y Jean Randlett (1968). Los plegados descritos en ambos libros son bastante complejos; empero, he aquí uno sencillo, que propongo a los lectores para que lo descubran por si mismos: ¿cómo dar dos dobleces en un billete de 1 dólar de forma que se vea una imagen lo más perfecta posible de un champiñón?

Todos los billetes portan una clave de identificación, que comúnmente consta de una o más letras y ocho cifras. Evidentemente, estas ocho cifras pueden servirnos para muchos tipos de pasatiempos más o menos matemáticos. Por ejemplo, ¿ha jugado alguna vez el lector al «poker de billetes»? Se juega a dos; cada jugador saca un billete del bolsillo, sin dejar que el contrario vea su numeración. Ambos van declarando por turno poseer «pareja» o jugadas superiores, usando las cifras en

lugar de naipes. Ni «escalera» ni «full» son ahora jugadas admisibles; en cambio los grupos de cifras idénticas pueden superar el «poker» (cuatro cifras idénticas). En su turno, cada jugador tiene que optar por mejorar su declaración anterior o abandonar, poniendo el billete cara arriba, sobre la mesa. Es lícito farolear. Cuando se produce un abandono se inspeccionan los números de ambos billetes; el jugador que habló en último lugar tiene derecho a servirse de las cifras de los dos para probar que dispone de la «mano» que anunció. Así, por ejemplo, si este jugador hubiese declarado «Seis treses» y su billete contuviera dos, sería necesario que el billete del contrario contuviera al menos cuatro treses más. De ser así, nuestro jugador ganaría el billete de su contrario; en otro caso, sería su adversario quien se embolsaría ambos billetes.

Uno de los trucos favoritos de Royal V. Heath, corredor de bolsa y mago aficionado, autor de *Mathemagic* (1933), consistía en pedirle a alguien que sacara un billete de un dólar (sirve lo mismo cualquier otro billete con ocho números de serie) y observase su numeración. Esta persona debe decir en voz alta la suma de las cifras primera y segunda, después, la suma de las segunda y tercera, la suma de tercera y cuarta, y así sucesivamente. Se tienen así siete sumas; para disponer de una octava, la persona debe dar la suma de las cifras segunda y última.

El mago va anotando estas ocho sumas al tiempo de ser declaradas. Y sin necesidad de cálculos escritos, puede dar casi inmediatamente el número de serie del billete en su papel.

El problema consiste en resolver rápidamente un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas. La solución de sistemas de este tipo se remonta hasta Diofanto, un matemático alejandrino del siglo III; la primera vez que el problema fue presentado como truco de magia fue en *Problémes Plaisants el Délectables* (1612) por Claude Gaspar Bachet, Problema VII. Hay un método sencillo para calcular el número primitivo. Se suman las sumas segunda, cuarta, sexta y octava; de este total se resta la suma de las primera, tercera, quinta y séptima, y la diferencia resultante se divide por dos. No cuesta mucho realizar mentalmente las operaciones al tiempo que nos dictan las cantidades. Empezando por la segunda suma, estos números se van restando y sumando alternativamente, como vemos en el esquema de la Figura 104.

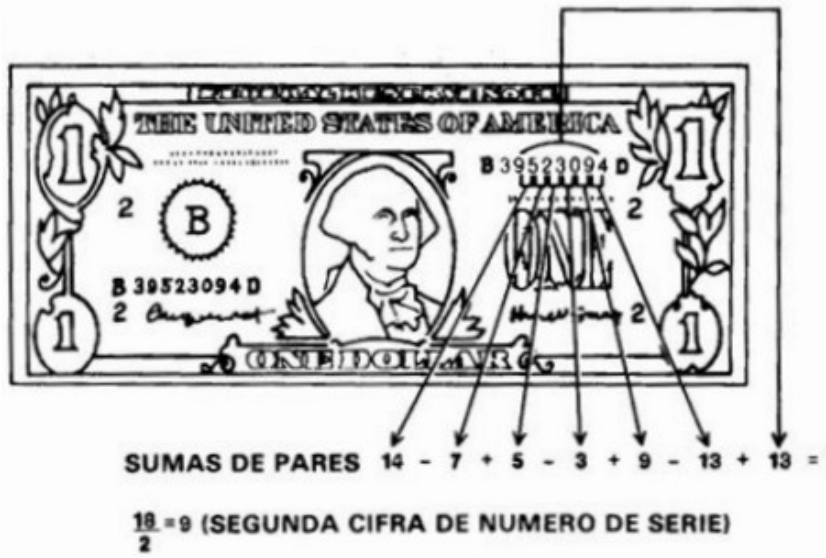


Figura 104. Una vieja fórmula para resolver un truco con un billete de 1 dólar

Al dividir por dos el resultado de las sumas y diferencias se obtiene la segunda cifra del número de serie. En lugar de anunciarlo enseguida, el mago se lo resta a la primera suma, pudiendo ya escribir el primer número de la serie. Ahora es fácil dar ordenadamente todas las cifras del número de identificación. Conocemos la primera y la segunda. Restando la segunda cifra de la segunda suma tendremos la tercera cifra. Restando ésta de la tercera suma sabremos la cuarta cifra, y así sucesivamente.

El truco no está restringido a números de ocho cifras, pudiendo igualmente realizarse sobre cualquier sucesión finita de números reales, positivos o negativos, racionales o irracionales. Cuando el número de términos fuese impar, la última suma a solicitar será la de los términos último y primero. Ahora, en lugar de saltar la primera suma, se parte de ella, restando y sumando alternativamente. Al dividir por dos el último resultado se obtiene el primer (y no el segundo) número de la sucesión primitiva. Supongamos, por ejemplo, que la sucesión esté formada por 100, 27, 2/3, 1, 2456. Las cinco sumas serán 73, 26 1/3, 1/3, 2455, y 2556. Al restarlas y sumarlas alternativamente, se obtiene 200. La mitad de 200 es 100, el primer número de la serie original. (Puede verse un rompecabezas inspirado en todo esto en *A Tangled Tale*, de Lewis Carroll, Knot IV.)

Muchos trucos sobre números de serie se inspiran en la llamada «regla de los nueves», regla que a su vez se debe a que nuestro sistema de numeración está basado en 10. Por ejemplo, pidámosle a una persona que saque un billete, mientras nosotros nos volvemos de espaldas. Hagámosle anotar el número de serie. Le decirnos después que permute las cifras del número a su capricho (es decir, que las escriba en otro orden cualquiera) lo que producirá un segundo número de ocho cifras, y que reste los dos números, el menor del mayor. Todavía de espaldas, le pedimos que tache y suprima una cifra cualquiera, distinta de cero, de la diferencia, y que nos diga después las cifras restantes, en cualquier orden. Inmediatamente sabremos decir qué cifra fue tachada.

El secreto está en que al desordenar las cifras de un número y restar el mayor del menor, la diferencia tiene «raíz digital» igual a 9. Lo veremos mejor con un ejemplo. Supongamos que el número de serie sea 06281377 y que tras permutar las cifras se haya obtenido 87310267. La diferencia es 81028890. La raíz digital de este número se obtiene sumando sus cifras (nada importa en que orden) «módulos 9». Para empezar, despreciamos los 9s. Ocho más 1 más 2 son 11, pero mentalmente sumamos las cifras de 11 y conservamos sólo 2, que es lo mismo que restarle 9 al 11. Se prosigue de esta forma, sumando las cifras de las sumas cuando éstas tengan más de un dígito. El número de una cifra obtenido al final de este proceso es la raíz digital del número dado. Como la diferencia entre números distintos de cifras iguales tiene raíz digital igual a 9, es fácil determinar la cifra suprimida. Basta ir sumando las cifras conforme nos las van dictando, despreciando siempre los nueves. Si el número final fuese 9, nuestro amigo tuvo que tachar un 9. En los demás casos, basta restar de 9 el digito final para conocer la cifra que fue tachada.

Hay otros muchos procesos cuyos resultados tienen raíces digitales iguales a 9. Por ejemplo, nuestro amigo podría sumar las cifras del número de serie, y después restarle a esta suma al número de serie. Puede también sumar las cifras, multiplicar por 8, y sumar el producto al número primitivo. En lugar de anunciar el número suprimido del resultado de ciertas operaciones, nosotros podemos calcular la edad de una persona, pidiéndole que se la sume al resultado y nos vaya diciendo en un orden cualquiera las cifras de la suma. Lo que hacemos es calcular la raíz digital de

los números declarados e ir luego sumándole nueves mentalmente hasta alcanzar una edad semejante a la estimada por su aspecto. Supongamos que una dama se avenga a seguir uno cualquiera de los procedimientos que generan números con raíz digital igual a 9. Después, ella suma su edad, y nos dice, en un orden cualquiera, las cifras de la suma. Supongamos que ésta tenga, raíz digital igual a 4. Mentalmente iremos sumando nueves: 4-13-22-31-40-49-. .. eligiendo finalmente la edad que nos parezca más verosímil.

Podemos preparar otro truco basado también en la regla de los nueves. Busquemos un billete cuyo número de serie tenga raíz digital 9, y llevémoslo en la cartera. Le pedimos a un amigo que escriba ocho dígitos al azar, pero antes de que empiece fingimos haber tenido una idea mejor. Sacamos nuestro billete y le decimos que use las cifras de la numeración. Se trata, le explicamos, de un método sencillo y rápido de dar cifras al azar. Nos volvemos de espaldas, para permitir que nuestro amigo desordene las cifras y sume los dos números de ocho guarismos; podemos después servirnos de cualquiera de los trucos ya descritos. En realidad, nuestro «paciente» puede formar tantos números de ocho cifras, permutando el dado, como le apetezca: la suma de todos ellos tendrá siempre raíz digital igual a 9. Puede desordenar y multiplicar por cualquier número: el producto tendrá raíz digital igual a 9. Si nuestro amigo entra en sospecha de nuestro billete e insiste en servirse de uno de los suyos, en lugar de éste haremos cualquiera de los trucos de diferencias antes explicados.

Un poco más difícil de descubrir es la clave del siguiente truco, también con números de serie, debido a Ben B. Braude, y publicado en una revista de ilusionismo de título tan improbable como *The Pailbearers Review* (literalmente, «Revista de los porta féretros»), octubre de 1967, pág. 127; diciembre de 1967, pág. 144. El sujeto anota el número de serie de uno de sus propios billetes, lo vuelve a escribir en orden inverso, y suma ambos números. Tacha una cualquiera de las cifras de la suma, y lee en voz alta la cantidad resultante, diciendo *x* en lugar del número tachado. Supongamos que el número de serie sea 30956714. Nuestra persona empieza sumándolo con su retrógrado, 41765903. Decide tachar la cifra 6, y lee en voz alta: 72722 *x* 17. ¿Sabría el lector cómo calcular el número que falta?

Evidentemente, la finalidad de los números de identificación de los billetes es la prevención de diversos delitos; empero, hay al menos un timo que se basa precisamente en el número de serie del billete. Un individuo, situado en un extremo de la barra de un bar, para crear ambiente se dedica a realizar trucos de ilusionismo a beneficio del personal de servicio y de la parroquia cercana. Tras unos cuantos trucos anuncia que va a realizar el truco más sensacional de cuantos conoce; para eso precisa un billete de 10 dólares. Le pide uno prestado al camarero, y para garantizar que le devolverá precisamente ese billete, le hace anotar su número de serie. El mago hace unos cuantos pliegues en el billete, y finge guardarlo y cerrarlo en un sobre. En realidad, el billete es deslizado por una rendija cortada en el dorso del sobre y escamoteado con la mano. El sobre, cerrado, es quemado en un cenicero, destruyéndose, así se supone, al mismo tiempo el billete que contiene. Mientras el sobre arde, el mago le pasa disimuladamente el billete a un «gancho», al tiempo de encaminarse al otro lado de la barra. El compinche usa el billete para pagar a otro empleado alguna consumición. Una vez quemado el sobre, el mago le dice al camarero que mire en la caja de la registradora, donde descubrirá el billete primitivo. Encontrado el billete, se comprueba el número de serie, y mientras todo el mundo está con la boca abierta los timadores se esfuman, con un beneficio del orden de 9$, más la consumición.

¿Sabía el lector que con un billete de 1 dólar disponemos de una regla graduada? La distancia desde el lado derecho del escudo, debajo del águila, hasta el margen derecho del billete es de una pulgada. La leyenda «United States», situada en lo alto de la cara verde, tiene dos pulgadas de longitud. El rectángulo que contiene las palabras «Federal Reserve Note», en lo alto del anverso del billete tiene tres pulgadas de longitud. El propio billete excede en tres dieciseisavos las seis pulgadas, por lo que eliminando un margen nos acercaremos mucho a seis pulgadas exactas.

Terminaré con una serie de charadas, todas relativas a billetes de 1 dólar, si no se dice otra cosa.

1, El numeral 1 aparece en 10 lugares del billete, sin contar los números de serie, que cambian de un billete a otro, pero sí contando el 1 que encabeza el año de la

serie y la cifra romana 1 situada bajo la pirámide. ¿Cuántas veces aparece una palabra que represente 1?

2. ¿Cuántas veces aparece la palabra ten (diez) en un billete de 10$?

3. Descubra dónde se encuentra la cifra 1776 en un billete de un dólar.

4. Descubra en el billete la figura de una llave.

5. Descubra una palabra que sea anagrama de «poetics».

6. Descubra una palabra que sea anagrama de «a night show».

7. Encuentre dónde se esconden estas siete palabras: «sofa», «dose», «shin», «oral», «eats», «fame», «isle», «loft».

8. Vea dónde se han ocultado «Esau» e «Iva».

9. Encuentre la frase «at sea».

10. Descubra una palabra española, impresa boca abajo.

11. Descubra una palabra que contiene la letra «O», pero una «O» pronunciada como una «W».

12. ¿Qué significa el ojo situado sobre la pirámide, y quién propuso situarlo allí?

13. En un billete de 5$, descubrir «New Jersey» y el número 172.

14. Lanzando al aire un billete de 5$, ¿cuál es la probabilidad de que al caer en el suelo podamos ver la efigie de Lincoln?

Soluciones

El primer problema consistía en plegar por dos veces un billete de dólar y lograr un champiñón. Así se ha hecho en la Figura 105.

Figura 105. Cómo doblar un billete de 1 dólar para obtener un hongo

El segundo problema se refería a la suma del número de serie del billete y su retrógrado. Cuando se suma un número de número par de dígitos con su recíproco, la suma siempre es múltiplo de 11. Y todos los múltiplos de 11 tienen la siguiente propiedad: o bien la suma de los dígitos situados en lugar impar es igual a la suma de los situados en lugar par, o bien las sumas se diferencian en un múltiplo de 11. Tenemos así un procedimiento para discernir el dígito omitido en la suma del número con su retrógrado. Basta, sencillamente, calcular la suma de los dígitos de lugar par, y la suma de los situados en lugar impar, y luego darle a *x* (el dígito suprimido) un valor que haga la diferencia entre las sumas bien igual a 0, bien igual a un múltiplo de 11. En el ejemplo el espectador dicta 72722 *x* 17. Aquí las cifras de posición impar suman 17, y las pares, 11. Puesto que *x* pertenece al grupo par, *x* habrá de tener un valor que haga subir la suma de 11 a 17. Por consiguiente, *x* será igual a 6. Si el grupo que contiene a *x* tuviera suma mayor que 17, pongamos por caso, 19, se sumarían 11 a 17, lo que da 28, y después se restan 19, dando así el valor 9 al guarismo desconocido. (También podríamos haber restado 11 al 19, dando 8, y después restarle 8 al 17, llegando igualmente a 9.) Si el conjunto que contiene a *x* da suma menor que la otra, y difiere de ella en más de 11, se suman 11 y se resta. Si las sumas de los grupos par e impar son iguales, el dígito ausente es 0.

He aquí las soluciones a las preguntas cortas.

1. Una palabra que signifique « 1 » aparece nueve veces en un billete de 1$. ¿Se ha dado cuenta de «unum»?
2. La palabra «ten» aparece 13 veces en un billete de 10$. ¿O quizá ha pasado por alto el grupo «ten» en «tender» y «septent»?
3. La fecha 1776 aparece en cifras romanas en la base de la pirámide.
4. La llave se encuentra en el sello verde del anverso del billete.
5. El anagrama de «poetics» es «coeptis» (sobre la pirámide).
6. «Washington» es anagrama de «a night show»
7. «Sofa» aparece en «United States of America»; «dose» está en la frase latina situada al pie de la pirámide; «shin», en «Washington»; «oral» están en «for all debts»; «eats» en «great seal»; «fame» en «of America»; «isle» en «is legal»; y «loft» en «great seal of the».

8. «Esau» se encuentra en «Thesaur» (dentro del sello verde). «Iva» está en «private».
9. «At sea» está en «great seal».
10. La palabra española invertida es «si» (en «This note is... ») y también en otros lugares. Un lector, Scott Brown, descubrió cuatro más: «o», «no», «ni» y «os».
11. «One» contiene una «O» que se pronuncia como una «W».
12. El ojo situado sobre la pirámide es el «ojo de la Providencia». Fue sugerido por Benjamín Franklin para subrayar que la Unión, simbolizada por la pirámide de 13 peldaños, debería siempre encontrarse bajo el ojo atento de Dios.
13. En un billete de 5$ «New Jersey» es el nombre del estado, visible entre las columnas tercera y cuarta, donde se encuentra el Lincoln Memorial Puede ser necesario una lupa para verlo. El número 172 podrá verse en grandes cifras oscuras, entre el follaje que cubre la base del monumento, a la izquierda. El número puede tomarse también como 3172, pero el 3 no está igual de claro que las demás cifras.
14. La probabilidad es 1. En el reverso de un billete de 5$ puede verse la estatua de Lincoln dentro del Lincoln Memorial.